
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра Российского квантового центра

Направление подготовки / специальность: 03.03.01 Прикладные математика и физика

Направленность (профиль) подготовки: Общая и прикладная физика

ИЗУЧЕНИЕ ДОСТОВЕРНОСТИ ДВУХКУБИТНОГО LS-ГЕЙТА, ОСНОВАННОГО НА 935-НМ ПЕРЕХОДЕ В ИОНАХ ИТТЕРБИЯ УВ

(бакалаврская работа)

Студент:

Каменских Павел Андреевич

(подпись студента)

Научный руководитель:

Семериков Илья Александрович,
канд. физ.-мат. наук

(подпись научного руководителя)

Консультант (при наличии):

(подпись консультанта)

Москва 2023

Оглавление

Аннотация	3
Введение	4
Глава 1. Динамика ионов в ловушке	8
1.1. Взаимодействие с квадрупольной ловушкой Пауля	8
1.1.1. Секулярные частоты и уравнение Матье	9
1.1.2. Нормальные моды кристалла	11
1.1.3. Гамильтониан ловушки	13
1.2. Взаимодействие с лазерным излучением	14
1.2.1. Частота Раби	15
Глава 2. Квантовая логика на ионах иттербия	16
2.1. Схема энергетических уровней в ионе Yb	16
2.2. Схема проведения двухкубитной операции	18
2.3. Классическая двухкубитная фазовая операция	19
2.3.1. Адиабатическое приближение	21
2.4. Симметричная двухкубитная фазовая операция	22
2.4.1. Адиабатическое приближение	23
2.5. Приближение Лэмба-Дике	24
Глава 3. Исследование достоверности двухкубитной фазовой опе- рации	26
3.1. Динамика фазового вентиля	26
3.2. Оценка достоверности фазовой двухкубитной операции	29
3.3. Численное моделирование двухкубитного фазового гейта	30
Заключение	34

Аннотация

За последние годы квантовые компьютеры на холодных ионах в ловушке показывали впечатляющие результаты. Однако для проведения операций на определённых ионах требуются индивидуальные лазерные пучки, что является большой проблемой для масштабируемости квантового компьютера. В данной работе предложена двухкубитная операция, в которой процесс адресации и сам гейт разделены, что поможет в масштабируемости. Также в работе изучена зависимость достоверности операции от различных параметров и с помощью численного моделирования получена достоверность $> 98.7\%$ с учётом всех распадков и предложены способы по улучшению данного результата.

Введение

В современном мире потребности человека в больших вычислительных мощностях растут с каждым днём. На классическом компьютере эффективно решается множество задач, однако предполагают, что существует некоторый класс задач (NP-полные), которые решаются за существенно большее время.

Данная проблема разрешается при использовании квантового компьютера. За последние годы было придумано множество алгоритмов на квантовых компьютерах, которые экспоненциально ускоряют решение NP-полных задач. Самый распространённый пример - это алгоритм Шора по факторизации большого числа на простые множители [1]. Предполагается, что данная проблема входит в класс NP-полных задач, и на этом факте основан современный протокол шифрования RSA [2], который гарантирует безопасность денежных средств в банках. Алгоритм Шора входит в класс алгоритмов, которые основаны на Квантовом преобразовании Фурье (QFT). QFT превосходит по времени все классические аналоги, например быстрое преобразование Фурье. Более того, экспериментально была продемонстрирована факторизация числа 15 на простые множители с помощью алгоритма Шора [3]. Вторым примером эффективных квантовых алгоритмов является алгоритм Гровера [4], позволяющий за $O(\sqrt{N})$ искать информацию в базе данных размера N . Данный алгоритм имеет множество применений в современном мире. Третьим полезным вариантом использования квантового компьютера является моделирование физических систем, которое уже более 30 лет назад было предложено Р. Фейнманом [5]. Квантовые симуляторы позволяют моделировать сложные квантовомеханические системы, такие как высокотемпературные сверхпроводники или нейтронные звезды. Кроме того, квантовые симуляторы можно использовать в моделировании сложных молекул, что может помочь в развитии медицины [6]. Более того, в отличие от квантовых компьютеров, квантовые симуляторы не требуют высоких точностей операций. Также стоит отметить квантово вдохновлённые алгоритмы, которые уже сейчас позволили улучшить вычисления на классическом компьютере. [7].

Реализация квантового компьютера на определённой физической системе должна удовлетворять ряду условий, которые называют критериями ДиВинченцо [8].

1. Масштабируемость квантового компьютера
2. Инициализация состояний
3. Большое время когерентности состояний
4. Универсальный набор квантовых операций
5. Возможность считывания состояний.

Выполнение данных условий означает, что квантовый компьютер можно считать универсальным, то есть на нем возможно выполнить любой алгоритм произвольной длины без возникновения ошибок. Из-за того, что система квантовая, невозможно полностью изолировать её от внешнего мира и при этом иметь возможность взаимодействовать с ней и выполнять определённые операции. Именно поэтому возникает квантовая декогеренция, которая разрушает суперпозицию состояний и уменьшает достоверность квантовых операций.

Кроме того, несмотря на выполнение данных критериев, необходимо следить за достоверностью вышеперечисленных операций. Как уже было отмечено, ошибки в реальном квантовом компьютере неизбежно будут существовать, поэтому был предложен ряд протоколов коррекции ошибок [9]. В данных протоколах несколько физических кубит объединяются в один логический кубит, ошибка операций которого становится меньше, чем у одного физического кубита.

На данный момент существует несколько принципиально разных платформ для квантовых вычислений. Реализованы компьютеры на сверхпроводниковых джозефсоновских контактах [10], холодных ионах в ловушке [11], нейтральных атомах [12], фотонах [13] и др. К примеру, компьютеры на сверхпроводниках и нейтральных атомах проще масштабировать, в то время как компьютеры на холодных ионах показывают лучшие достоверности квантовых операций [14].

Данная работа посвящена ионной платформе, поэтому рассмотрим её подробнее.

Идея реализации квантового компьютера на холодных ионах была придумана П. Цоллером и И. Цираком в 1995 году [15]. Ионы помещаются в квадрупольную ловушку Пауля [16], которая сама в свою очередь находится в вакуумной камере. За кубитные состояния, как правило, выбираются уровни, переход между которыми дипольно запрещён. Преимуществами данной платформы являются большое время когерентности кубитных состояний [17], высокая достоверность однокубитных и двухкубитных операций. Также стоит отметить, что из-за сильного кулоновского отталкивания даже очень удалённые ионы можно запутать, то есть на ионной платформе можно реализовать полностью связную топологию. Однако дальное действие кулоновских сил, так как при сильном взаимодействии становится затруднительно реализовывать параллельные двухкубитные операции. Окончательно, на ионной платформе просто реализовывать кудиты [18], которые состоят из $d > 2$ состояний. Кудиты позволяют реализовывать сложные многокубитные операции за меньшее число элементарных операций [19], например гейты Тоффоли, которые встречаются во многих квантовых алгоритмах.

Любая реализация квантового компьютера должна удовлетворять критериям ДиВинченцо. Как уже было отмечено выше, кубиты на холодных ионах обладают большим временем когерентности. В данной работе не будут затронуты инициализация кубитных состояний и их считывание. Считывание квантовых состояний часто вносит большую ошибку, поэтому были придуманы методы по её уменьшению [20]. Как известно, универсальный набор квантовых элементов должен состоять из нескольких однокубитных операций и одной двухкубитной [21]. Самой распространённой двухкубитной операцией на холодных ионах является MS-гейт, который был придуман А. Sørensen и К. Mølmer [22] и назван в их честь. Также можно встретить другую операцию, которую называют геометрическим фазовым вентилем или Light-Shift(LS) гейтом [23]. Отличие данной операции от вышеупомянутого MS-гейта заключается в том, что операция производится на двух уровнях, а не на трёх и после операции на состояния накручивается фаза, зависящая от начальных состояний двух кубит, в то время как

в MS-гейте изменяются населённости. Оба данных метода имеют ряд преимуществ. К примеру, LS-гейт не чувствителен к флуктуациям фазы лазеров [24], в то время как MS-гейт проще в реализации.

Осталось обсудить последний и самый проблематичный критерий - масштабируемость квантового компьютера. Первая проблема масштабируемости в ионном компьютере заключается в том, что с увеличением числа ионов в ловушке, они более не выстраиваются в линейный кристалл, образуя более сложную структуру [25]. Вторая проблема масштабируемости связана с индивидуальной адресацией. С ионами взаимодействуют с помощью лазерного поля и поэтому для каждого иона требуется индивидуальные лазерные пучки, из-за чего с увеличением числа кубит мощность на одну операцию будет уменьшаться. В данной работе предложена новая схема двухкубитного LS-гейта, при котором индивидуальную адресацию реализуют одни лазерные пучки, а сама двухкубитная операция производится глобально. Также в работе исследована зависимость достоверности LS-гейта от различных параметров лазеров.

Работа разделена на несколько глав. В первой главе рассмотрено взаимодействие иона с лазерами и с ловушкой, также уделено внимание нормальным модам кристалла. Вторая глава посвящена квантовым вычислениям на ионе $^{171}\text{Yb}^+$ и проведению фазовой двухкубитной операции. В третьей главе рассмотрена эволюция двухкубитной фазовой операции и влияние различных факторов на достоверность операции.

Глава 1

Динамика ионов в ловушке

В данной главе будут введены основные понятия, необходимые для проведения квантовых вычислений на холодных ионах. Будут рассмотрены взаимодействие одиночного иона с лазерным излучением и с ловушкой Пауля.

1.1. Взаимодействие с квадрупольной ловушкой Пауля

Для удержания одиночных ионов используется квадрупольная Ловушка Пауля [16]. В ловушке используются переменное постоянное поля, благодаря которым ионы можно удерживать и выстроить в цепочку. За данное изобретение Вольфганг Пауль был удостоен Нобелевской премии. Вблизи положения равновесия потенциал можно считать квадрупольным:

$$\phi = \frac{V}{R^2} (\alpha_x x^2 + \alpha_y y^2 + \alpha_z z^2) \cos(\Omega_{\text{rf}} t) + \frac{U}{R^2} (\alpha'_x x^2 + \alpha'_y y^2 + \alpha'_z z^2), \quad (1.1)$$

где (x, y, z) - отклонения от точки равновесия, Ω_{rf} - частота переменного напряжения. Константы α_i и α'_i являются геометрическими факторами, которые зависят от формы электродов. Такой потенциал в отсутствие зарядов обязан удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta\phi = 0$, которое будет удовлетворено всюду, тогда и только тогда, когда

$$\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z = 0, \quad \alpha'_x + \alpha'_y + \alpha'_z = 0. \quad (1.2)$$

Рассмотрим частный случай линейной ловушки Пауля. При такой конфигурации ионы удерживаются вдоль оси z постоянным полем, а в плоскости $0xy$ переменным полем. Ось z также принято называть осью ловушки, так как ионы выстраиваются в линейный кристалл вдоль $0z$. В симметричном случае коэффициенты должны быть равны

$$\alpha_x = -\alpha_y, \alpha_z = 0, \quad \alpha'_x = \alpha'_y = -\alpha'_z/2 < 0. \quad (1.3)$$

1.1.1. Секулярные частоты и уравнение Матъе

Уравнения движения для одиночного иона можно написать в компактном виде:

$$\ddot{u}_i + [a_i - 2q_i \cos(\Omega_{\text{rf}}t)] \frac{\Omega_{\text{rf}}^2}{4} u_i = 0, \quad i = \{x, y, z\}, \quad (1.4)$$

где были введены коэффициенты a_i и q_i , которые можно выразить через параметры ловушки, фигурирующие в (1.1):

$$q_i = -\alpha_i \frac{4eV}{mR^2\Omega_{\text{rf}}^2}, \quad a_i = \alpha'_i \frac{8eU}{mR^2\Omega_{\text{rf}}^2}. \quad (1.5)$$

Введём безразмерное время $\tau = \Omega_{\text{rf}}t/2$. Тогда уравнение (1.4) можно свести к уравнениям Матъе:

$$\frac{d^2 u_i}{d\tau^2} + [a_i - 2q_i \cos(2\tau)] u_i = 0, \quad i = \{x, y, z\}. \quad (1.6)$$

Рассмотрим, при каких параметрах a_i и q_i будет существовать ограниченное периодическое движение, которое принято называть стабильным решением. Неограниченные решения называются нестабильными, и таких случаев требуется избегать. Рассмотрим удержание иона вдоль оси x . Отметим, что решение вдоль оси y отличается заменой $\tau \rightarrow \tau + \pi/2$. Для уравнения Матъе справедлива Теорема Флоке, которая говорит о существовании решения вида

$$u_x(\tau) = e^{i\beta_x \tau} f(\tau), \quad (1.7)$$

где $f(\tau)$ - некоторая периодическая функция. Нас интересуют стабильные решения уравнения Матъе вблизи точки $(0, 0)$, что соответствует действительным значениям коэффициента β_x . Данная функция зависит от параметров a_x и q_x , и область параметров, в которой данная функция действительная, называют областью стабильности. Для линейной ловушки Пауля область стабильности можно видеть на рис. 1. Данная область получена наложением двух областей для движения по осям x и y .

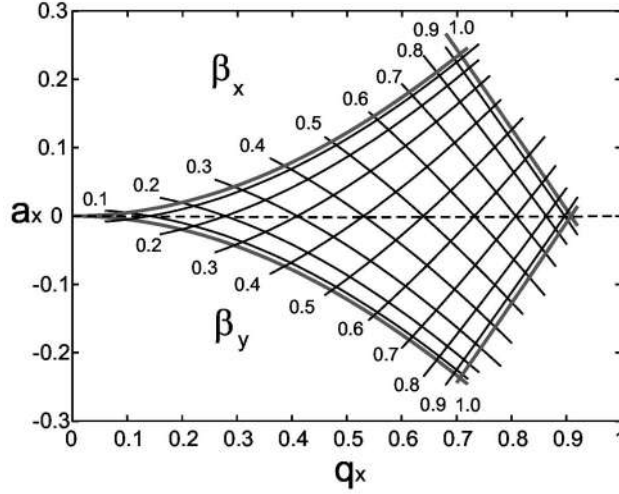


Рис. 1: Первая область устойчивости для линейной ловушки Пауля. Стабильная область заштрихована. Взято из статьи [26].

В практическом случае параметры ловушки a_i и q_i выбираются малыми, причём $a_i \ll q_i$, поэтому всегда будет существовать стабильное решение. Кроме того, при малых параметрах ловушки справедливо [26]:

$$\beta_x \approx \sqrt{a_x + q_x^2/2} \quad (1.8)$$

$$u_x(t) = A \cos\left(\beta_x \frac{\Omega_{\text{rf}}}{2} t\right) \left(1 - \frac{q_x}{2} \cos(\Omega_{\text{rf}} t)\right). \quad (1.9)$$

В результате можно сделать вывод, что ион медленно (по сравнению с частотой переменного поля) колеблется с частотой, которую принято называть радиальной секулярной частотой

$$\omega_r = \beta_x \frac{\Omega_{\text{rf}}}{2}. \quad (1.10)$$

Кроме основных медленных колебаний присутствуют быстрые микродвижения с частотой переменного поля и малой амплитудой.

Вдоль оси z происходит статическое удержание, так как $q_z = 0$. Отсюда получаем колебательное движение, которое определяется коэффициентом a_z . Аксиальная секулярная частота тогда равна

$$\omega_s = \frac{\Omega_{\text{rf}}}{2} \sqrt{a_z}. \quad (1.11)$$

Отсюда получаем, что ионы удерживаются вдоль всех осей эффективным потенциалом

$$\tilde{V} = \frac{m}{2}\omega_r(x^2 + y^2) + \frac{m}{2}\omega_s z^2. \quad (1.12)$$

1.1.2. Нормальные моды кристалла

В данной главе будут рассмотрены нормальные колебания ионного кристалла. Перед этим найдём равновесные положения ионов вдоль оси ловушки z . Пусть в ловушке Пауля N ионов выстроились в цепочку. Обозначим секулярную частоту ловушки вдоль оси z за ω_s . Тогда общая потенциальная энергия системы состоит из взаимодействия ионов с ловушкой и их попарного взаимодействия,

$$V = \sum_{m=1}^N \frac{1}{2} m \omega_s^2 z_m^2 + \sum_{n \neq m}^N \frac{e^2}{2|z_n - z_m|}, \quad (1.13)$$

где z_n - координата n -го иона в момент вдоль оси ловушки. При подсчёте кулоновской энергии взаимодействия в знаменателе стоит 2, потому что каждая пара суммируется дважды. Также здесь можно пренебречь тем, что ионы отклоняются от оси ловушки, т. е. $|x_n - x_m| \ll |z_n - z_m|$.

При кристаллизации движение ионов можно считать малыми колебаниями вблизи положений равновесия, поэтому $\vec{r}_n(t) = \vec{r}_n^{(0)} + \vec{q}_n(t)$. Рассмотрим лишь колебания вдоль оси ловушки, пренебрегая поперечным движением ионов. Для удобства введём параметр длины $l = \sqrt[3]{\frac{e^2}{m\omega_s^2}}$ и безразмерные величины $u_m \equiv \frac{z_m^{(0)}}{l}$. Условие равновесия для n -го иона - равенство нулю потенциальной силы

$$\left. \frac{\partial V}{\partial z_n} \right|_{z_n=z_n^{(0)}} = 0. \quad (1.14)$$

Отсюда можно получить полную систему уравнений на положения равновесия ионов,

$$u_n - \sum_{m < n} \frac{1}{(u_n - u_m)^2} + \sum_{m > n} \frac{1}{(u_n - u_m)^2} = 0, \quad (1.15)$$

которую можно решить численными методами.

Далее рассмотрим нормальные колебания кристалла. Для этого разложим потенциал (1.13) вблизи положений равновесия в ряд Тейлора до второго порядка

и запишем лагранжиан в виде

$$L \approx \frac{m}{2} \sum_{m=1}^N \dot{q}_m^2 - \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N q_n q_m \frac{\partial^2 V}{\partial z_n \partial z_m} \Big|_{z_n=z_n^{(0)}, z_m=z_m^{(0)}}. \quad (1.16)$$

Вторую производную потенциала можно записать в удобном виде:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z_n \partial z_m} \Big|_{z_n=z_n^{(0)}, z_m=z_m^{(0)}} = m\omega_s^2 A_{nm} = m\omega_s^2 \begin{cases} 1 + \sum_{l \neq n} \frac{2}{|u_n - u_l|^3}, & n = m; \\ -\frac{2}{|u_n - u_m|^3}, & n \neq m. \end{cases} \quad (1.17)$$

Нахождение продольных колебаний сводится к поиску собственных значений и собственных векторов матрицы A_{nm} :

$$A_{nm} b_m^{(k)} = \frac{\omega_k^2}{\omega_s^2} b_m^{(k)}, \quad (1.18)$$

где $b_m^{(k)}$ - нормальный вектор k -й продольной моды. Для нахождения поперечных мод необходимо учитывать отклонения от положений равновесия вдоль координат x и y . Это значительно осложнит выкладки, однако схема нахождения поперечных мод и векторов колебаний будет аналогична.

В данной работе нас будет интересовать так называемая мода центра масс. В этом случае ионы колеблются с одинаковыми амплитудами как единое целое,

$$b_n^C = \frac{1}{\sqrt{N}}. \quad (1.19)$$

Можно заметить свойство матрицы A_{nm} : $\sum_{m=1}^N A_{nm} = 1$. Отсюда получаем, что частота моды центра масс в точности равна секулярной частоте $\omega_C = \omega_s$. Данная мода имеет то преимущество, что все ионы имеют одинаковые амплитуды колебаний вне зависимости от числа ионов.

1.1.3. Гамильтониан ловушки

Для перехода от лагранжиана (1.16) к гамильтониану применим преобразование Лежандра:

$$H_{tr} = \sum_j \frac{p_j^2}{2m} + \frac{m\omega_s^2}{2} \sum_{i,j} A_{i,j} q_i q_j. \quad (1.20)$$

Далее произведём замену переменных в гамильтониане и перейдём к координатам нормальных мод кристалла:

$$Q_j = \sum_j b_j^{(k)} q_j, \quad P_k = \sum_k b_j^{(k)} p_j. \quad (1.21)$$

Нетрудно проверить, что данное преобразование переводит канонические переменные в канонические, т.е. $\{Q_k, P_l\} = \delta_{kl}$. Это следует из свойства ортонормированности амплитудных векторов:

$$\sum_i b_i^{(k)} b_i^{(l)} = \delta_{kl}. \quad (1.22)$$

Используя все выше перечисленные свойства и соотношение (1.18) получаем гамильтониан взаимодействия с ловушкой:

$$H_{tr} = \sum_k \left(\frac{P_k^2}{2m} + \frac{m\omega_{z,k}^2}{2} Q_k^2 \right). \quad (1.23)$$

Выше было получено, что гамильтониан записывается в сумму невзаимодействующих осцилляторов. После этого можно применить метод вторичного квантования и перейти от координатного представления к фоковскому:

$$\hat{Q}_k = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_{z,k}}} (\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger), \quad \hat{P}_k = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega_{z,k}}{2}} (\hat{a}_k^\dagger - \hat{a}_k). \quad (1.24)$$

Таким образом квантовый гамильтониан взаимодействия с ловушкой имеет вид:

$$\hat{H}_{tr} = \sum_k \hbar\omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k. \quad (1.25)$$

Здесь была опущена энергия нулевых колебаний, $\frac{\hbar\omega_k}{2}$ для каждой моды.

1.2. Взаимодействие с лазерным излучением

Рассмотрим взаимодействие одиночного иона с классическим лазерным полем [27]. Будем считать поле монохроматическим с частотой ω ,

$$\vec{E}(t) = \vec{\varepsilon}E_0 \cos(\omega t), \quad (1.26)$$

где $\vec{\varepsilon}$ - поляризация поля. В данной формуле пространственная зависимость поля E отсутствует, так как ей можно пренебречь. Это справедливо в дипольном приближении, которое выполняется, когда размеры системы существенно меньше длины волны. Действительно, размеры иона (порядка \AA) много меньше оптической длины волны (сотни нм). Однако такие рассуждения верны только для дипольного взаимодействия и в случае квадрупольного, пренебрегать пространственной зависимостью поля нельзя.

В данной части ион можно считать двухуровневой системой. Основное и возбуждённое состояния атома обозначим за $|g\rangle$ и $|e\rangle$ соответственно. Гамильтониан можно представить в виде двух слагаемых. Первое - уровни энергии иона,

$$\hat{H}_{\text{lvl}} = \hbar\omega_0 |e\rangle\langle e|. \quad (1.27)$$

Здесь энергия основного состояния $|g\rangle$ принята равной нулю. Взаимодействие иона с полем в дипольном приближении равно

$$\hat{H}_{\text{int}} = -\hat{\vec{d}} \cdot \vec{E}, \quad (1.28)$$

где $\hat{\vec{d}}$ - дипольный момент иона. В данной работе рассматривается ион иттербия $^{171}\text{Yb}^+$, который можно считать водородоподобным, поэтому дипольный момент иона записывается через координату валентного электрона: $\hat{\vec{d}} = -e\hat{\vec{r}}$. Полный гамильтониан запишется в виде

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{int}} + \hat{H}_{\text{lvl}}. \quad (1.29)$$

1.2.1. Частота Раби

Гамильтониан взаимодействия можно записать в более удобном виде [27]:

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{\hbar\Omega}{2} (\sigma_+ + \sigma_-) (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}), \quad (1.30)$$

где введено обозначение $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$, $\sigma_- = \sigma_+^\dagger$. Также введена частота Раби Ω , которая определяется как:

$$\Omega := -\frac{\langle g|\vec{\varepsilon} \cdot \hat{d}|e\rangle E_0}{\hbar}. \quad (1.31)$$

Данная частота зависит от мощности лазера и ширины линии Γ_e возбуждённого состояния $|e\rangle$. Приведём также характерную зависимость частоты Раби для дипольного перехода:

$$\Omega \propto \sqrt{\Gamma_e P_0}. \quad (1.32)$$

Здесь P_0 - мощность лазера.

Глава 2

Квантовая логика на ионах иттербия

В данной главе будут рассмотрены квантовые вычисления на ионах иттербия $^{171}\text{Yb}^+$. Будет рассмотрена энергетическая схема уровней в ионе иттербия, а также предложена схема для двухкубитной операции, в которой разделены адресация и сам гейт.

2.1. Схема энергетических уровней в ионе Yb

Существует несколько реализаций квантового компьютера на различных ионах: Ca, Yb, Mg, и т. д. В нашей работе был выбран ион иттербия. Существует несколько изотопов атома иттербия, массовые числа для стабильных изотопов варьируются от $M = 171$ до $M = 174$ (самого распространённого). Для построения квантового компьютера, необходимо удовлетворить всем критериям Ди Винченцо и сделать это эффективно и рационально.

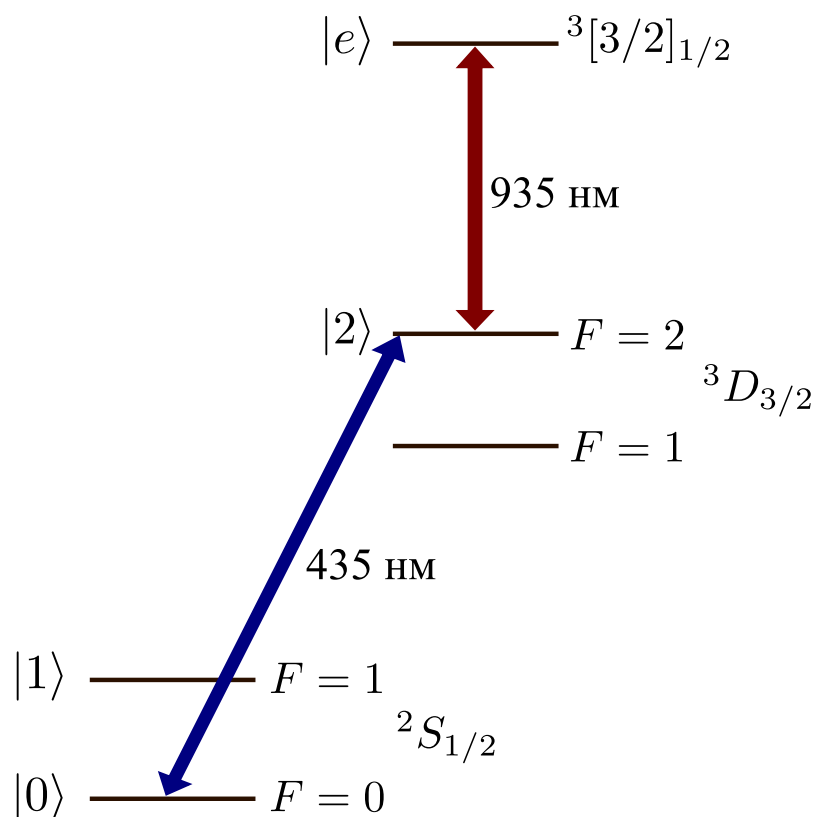


Рис. 2: Схема энергетических уровней в ионе $^{171}\text{Yb}^+$. Термы иона подписаны справа. Стрелками обозначены переходы, которые используются в работе. Чтобы не загромождать рисунок, Зеемановское расщепление уровней не указано

Был выбран изотоп иттербия-171, так как он имеет ядерный спин $I = 1/2$, поэтому основное состояние ${}^2S_{1/2}$ расщепляется на два уровня из-за сверхтонкого расщепления. В данной работе не будут затронуты процессы ионизации, охлаждения ионов и будет рассмотрено лишь проведение двухкубитной операции.

На рисунке 2 слева от уровней можно видеть обозначения для термов, которые используются в работе. За кубитные состояния выбираются немагнитные уровни основного состояния:

$$|0\rangle = |{}^2S_{1/2}, F = 0\rangle, \quad |1\rangle = |{}^2S_{1/2}, F = 1, m_F = 0\rangle. \quad (2.1)$$

Разница энергий между ними $\Delta_S = 12.6$ ГГц. Выбор микроволнового кубита объясняется большим временем жизни верхнего состояния $|1\rangle$, так как состояния кубита находятся в одном терме и спонтанный распад между ними практически невозможен. Состояния выбираются немагнитными ввиду наличия эффекта Зеемана. Ион в магнитном поле испытывает расщепление уровней, однако состояния с магнитным квантовым числом $m_F = 0$ не расщепляются в первом порядке, поэтому данные состояния будут стабильными к влиянию флуктуаций магнитного поля. На рис. 2 введены обозначения для двух других уровней:

$$|2\rangle = |{}^2D_{3/2}, F = 2, m_F = 0\rangle, \quad |e\rangle = |{}^3[3/2]_{1/2}, F = 0\rangle. \quad (2.2)$$

Перейдём к рассмотрению переходов в ионе иттербия. Переход $|0\rangle \longleftrightarrow |2\rangle$, обозначенный на рисунке синим, является квадрупольным (E2) с шириной линии $\Gamma_2 = 2\pi \cdot 3.02$ Гц. Отсюда можно выразить время жизни состояния $|2\rangle$, которое равно $\tau_2 = \Gamma_2^{-1} = 52.7$ мс. Стоит также отметить, что иногда за кубитные состояния выбираются уровни $|{}^2S_{1/2}, F = 0\rangle \equiv |0\rangle$ и $|{}^2D_{1/2}, F = 2, m_F = 0\rangle \equiv |2\rangle$. Данный выбор объясняется более простой реализацией однокубитных операций. Времени τ_2 достаточно для проведения 100 – 500 двухкубитных операций [28], что с увеличением числа кубит и следовательно числа операций будет критично.

Переход, обозначенный красным на рис. 2 используется для проведения двухкубитной операции, он является дипольным, ширина линии $\Gamma_e = 2\pi \cdot 4.2$ МГц. Самый вероятный переход из-за спонтанного излучения с уровня $|e\rangle$ в $|1\rangle$. Вероятность такого исхода $\alpha_{3/2} = 98.2\%$. Данный переход является широким, и спонтанное излучение приносит большую ошибку в проведение операции.

2.2. Схема проведения двухкубитной операции

Классический двухкубитный фазовый вентиль осуществляется путём взаимодействия иона с бихроматическим лазерным полем с длиной волны 935 нм (рис. 2). Чтобы добиться масштабируемости квантового компьютера, предлагается проводить глобальную двухкубитную операцию. Глобальность подразумевает, что лазерное излучение воздействует сразу на все ионы, например, вдоль оси ловушки. Взаимодействовать с лазерным полем будут лишь те ионы, которые перед этим находились в состоянии $|2\rangle$. Поэтому перед непосредственно двухкубитной операцией на целевых ионах производится π -импульс: $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$, и здесь уже нужна индивидуальная адресация. После глобального двухкубитного вентиля производится обратный π -импульс $|2\rangle \rightarrow |0\rangle$. В такой конфигурации индивидуальная адресация ионов и сама двухкубитная операция разделены.

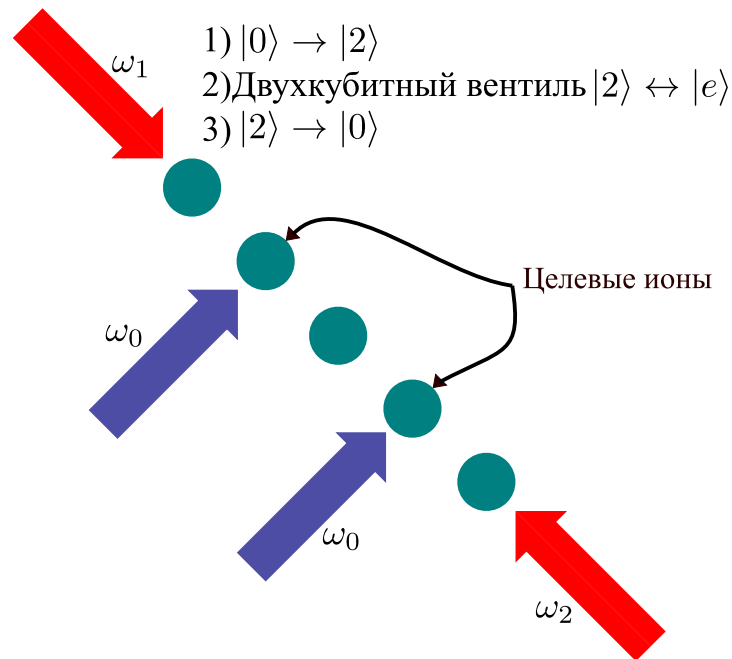


Рис. 3: Схема проведения двухкубитной операции. Здесь красные стрелки обозначают глобальные пучки с длиной волны 935 нм, синие обозначают пучки с длиной волны 435 нм, осуществляющие π -импульсы. Рядом со стрелками обозначены частоты лазерных импульсов.

2.3. Классическая двухкубитная фазовая операция

В данной части будет изучена динамика ионов под действием бихроматического лазерного поля с длиной волны 935 нм.

Рассмотрим два лазера, частоты которых равны ω_1 и ω_2 , направленные в противоположные стороны вдоль оси ловушки, как красные стрелки на рис. 3.

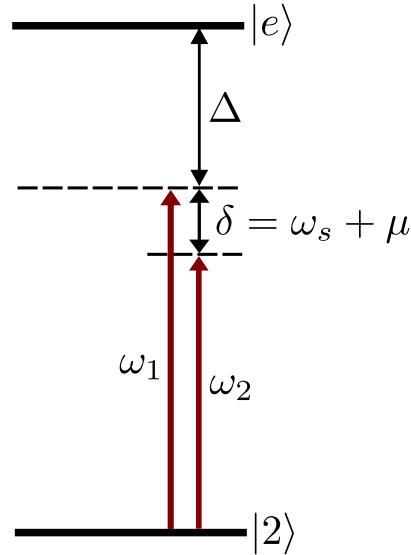


Рис. 4: Схема уровней для проведения двухкубитной фазовой операции. Красными стрелками обозначены лазеры, рядом со стрелками указаны их частоты. Справа от уровней указаны их обозначения (см. (2.2)).

Разность частот $\delta = \omega_1 - \omega_2$ между компонентами лазера выбирается близкой к секулярной частоте ω_s , то есть выполняется $|\mu| = |\delta - \omega_s| \ll \omega_s$, см. рис. 4. Отстройка Δ от возбуждённого уровня $|e\rangle$ выбирается большей по сравнению с шириной линии Γ_e и частотой Раби Ω . Это объясняется тем, что ошибка из-за спонтанных распадов с возбуждённого состояния зависит от соотношения между отстройкой, частотой Раби и шириной линии, что будет рассмотрено позже. Отстройка Δ также должна быть малой по сравнению с оптическими частотами лазеров:

$$\Gamma_e \ll \Delta \ll \omega_1 \approx \omega_2. \quad (2.3)$$

Гамильтониан взаимодействия лазерного поля с ионами будет иметь вид (1.30):

$$\hat{H}_{\text{int}} = \sum_{j=1,2} \sum_{l=1,2} (\hbar\Omega |e_j\rangle\langle 2_j| + \hbar\Omega^* |2_j\rangle\langle e_j|) \cos(k_l \hat{z}_j + \omega_l t + \phi_l). \quad (2.4)$$

Также гамильтониан включает в себя взаимодействие с ловушкой (1.25) и энергетические уровни:

$$\hat{H}_{\text{tr}} = \sum_{\nu} \hbar \omega'_s \hat{a}_{\nu}^{\dagger} \hat{a}_{\nu} - \text{Гамильтониан ловушки}; \quad (2.5)$$

$$\hat{H}_0 = \sum_{j=1,2} \mathcal{E}_2 |2_j\rangle\langle 2_j| + \mathcal{E}_e |e_j\rangle\langle e_j| - \text{Уровни энергии}. \quad (2.6)$$

Полный гамильтониан является суммой всех выше перечисленных компонент:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}} + \hat{H}_{\text{tr}}. \quad (2.7)$$

Сперва рассмотрим взаимодействие лазерного поля с одним ионом, опустим взаимодействие с ловушкой и перейдём в представление взаимодействия для ионных уровней (пока не обращаем внимания на колебательные состояния) с помощью унитарного преобразования

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \exp(i\frac{\mathcal{E}_2 t}{\hbar}) & 0 \\ 0 & \exp(i\frac{\mathcal{E}_e t}{\hbar}) \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

При таком преобразовании гамильтониан примет вид

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{H}}_j = \hat{U} \hat{H}_j \hat{U}^{\dagger} + i\hbar \dot{\hat{U}} \hat{U}^{\dagger} = & \frac{\hbar\Omega}{2} \left(\hat{C}_{1j} e^{-it\Delta} + \hat{C}_{1j}^{\dagger} e^{-it(2\omega_1+\Delta)} \right) |2_j\rangle\langle e_j| + \\ & + \frac{\hbar\Omega}{2} \left(\hat{C}_{2j} e^{-it(\Delta+\delta)} + \hat{C}_{2j}^{\dagger} e^{-it(\omega_1+\omega_2+\Delta)} \right) |2_j\rangle\langle e_j| + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где введено обозначение $\hat{C}_{lj} = e^{ik_l \hat{z}_j + i\phi_l}$, ϕ_l - фаза l -го лазера, h.c. - комплексное сопряжение. В гамильтониане взаимодействия из-за соотношения (2.3) между частотами можно пренебречь слагаемыми, осциллирующими с частотами $2\omega_1 + \Delta$ и $\omega_1 + \omega_2 + \Delta$, так как при интегрировании они внесут гораздо меньший вклад по сравнению с другими слагаемыми. Данное приближение называют *приближением Вращающейся Волны*. Гамильтониан в приближении вращающейся волны для оптических частот:

$$\hat{\tilde{H}}_j \approx \hbar\Delta |e_j\rangle\langle e_j| + \frac{\hbar\Omega}{2} \left(\hat{C}_{1j} e^{-it\Delta} + \hat{C}_{2j} e^{-it(\Delta+\delta)} \right) |2_j\rangle\langle e_j| + \text{h.c.} \quad (2.10)$$

2.3.1. Адиабатическое приближение

Рассмотрим волновую функцию одного иона в представлении взаимодействия $\tilde{\psi} = (A_2, A_e)^\top$. В данной части индекс j опущен, так как пока будет рассмотрен гамильтониан для одного иона. Тогда можем записать уравнение Шредингера для гамильтониана из (2.10):

$$\begin{cases} \dot{A}_2 = -\frac{i}{2}\Omega A_e \left(\hat{C}_1 e^{-it\Delta} + \hat{C}_2 e^{-it(\Delta+\delta)} \right); & (2.11a) \\ \dot{A}_e = -\frac{i}{2}\Omega^* A_2 \left(\hat{C}_1^\dagger e^{it\Delta} + \hat{C}_2^\dagger e^{it(\Delta+\delta)} \right). & (2.11b) \end{cases}$$

Напомним, что рассматривается случай большой отстройки Δ , которая является большой по сравнению с частотой Раби Ω и шириной линии Γ_e . Поэтому можно считать, что населённость уровня $|e\rangle$ меняется гораздо быстрее по сравнению с населённостью уровня $|2\rangle$. Данное приближение называется *Адиабатическим приближением*. Тогда получим зависимость $A_e(t)$:

$$A_e(t) = \frac{1}{2}\Omega^* A_2(t) \left(\hat{C}_1^\dagger \frac{e^{it\Delta} - 1}{\Delta} + \hat{C}_2^\dagger \frac{e^{it(\Delta+\delta)} - 1}{\Delta + \delta} \right). \quad (2.12)$$

Теперь подставим A_e в (2.11a) и получим эффективный гамильтониан для уровня $|2\rangle$. При подстановке можно пренебречь слагаемыми, которые осциллируют с частотами порядка Δ , так как $\delta \ll \Delta$. Получим, что населённость $A_2(t)$ меняется медленнее чем $e^{it\Delta}$, а значит Адиабатическое приближение оправдано:

$$i\dot{A}_2 = \frac{|\Omega|^2}{4} A_2 \left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta + \delta} + \frac{\hat{C}_1^\dagger \hat{C}_2}{\Delta} e^{-it\delta} + \frac{\hat{C}_2^\dagger \hat{C}_1}{\Delta + \delta} e^{it\delta} \right). \quad (2.13)$$

Как было указано ранее, отстройка от возбуждённого уровня Δ выбирается большой по сравнению с разницей частот между лазерами δ , поэтому можем пренебречь величиной δ в знаменателе. Тогда эффективный гамильтониан будет иметь вид

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \frac{\hbar\Omega^2}{2\Delta} (1 + \cos(\Delta k \hat{z} + \delta t + \Delta\phi)) |2\rangle \langle 2|, \quad (2.14)$$

где $\Delta k = k_1 - k_2$, $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$. В данном эффективном гамильтониане присутствует явный недостаток, так называемый эффект Штарка - постоянный сдвиг

энергии на $\frac{\hbar\Omega^2}{2\Delta}$ при наложении электрического поля. Он будет изменять фазу состояний, что критично, так как в случае наличия ненулевого Штарковского сдвига либо двухкубитный фазовый гейт будет иметь неправильное значение относительной фазы, либо это значение будет чувствительно к мощности лазеров.

2.4. Симметричная двухкубитная фазовая операция

В данной части будет предложена двухкубитная операция, в которой отсутствует эффект Штарка. Конфигурация отличается от классического фазового вентиля тем, что цепочка ионов освещается двумя симметричными бихроматическими полями. Данный метод не требует большей мощности по сравнению с классическим и даёт возможность делать операцию, устойчивую к шумам мощности лазеров.

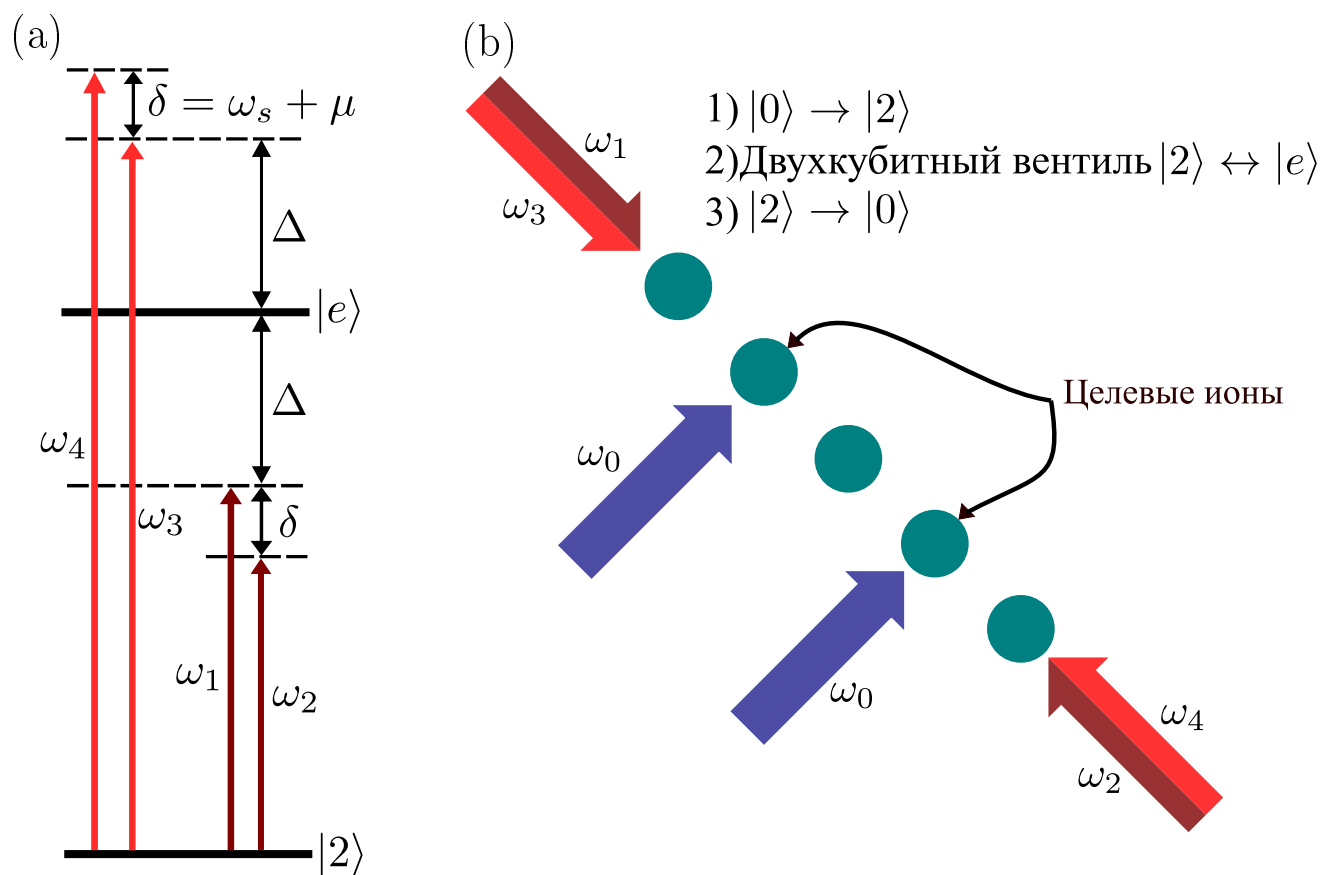


Рис. 5: Реализация симметричной фазовой операции. На рисунке (а) показана схема уровней и соотношения между частотами лазеров. Красными стрелками обозначены частоты лазеров. На рисунке (б) показана протокол проведения двухкубитной операции. Синими стрелками обозначены лазеры, излучающие на 435 нм, красными - на 935 нм.

Гамильтониан взаимодействия с полем (1.30),

$$\hat{H}_{\text{int}} = \sum_{j=1,2} \sum_{l=1}^4 \hbar \Omega_l \cos(k_l \hat{z}_j + \omega_l t + \phi_l) |e_j\rangle\langle 2_j| + \text{h.c.} \quad (2.15)$$

Далее выкладки повторяются, также рассматриваются полный гамильтониан как сумма гамильтониана ловушки, энергетических уровней и \hat{H}_{int} . Аналогично применяем унитарный оператор (2.8). Гамильтониан в приближении вращающейся волны для 4 лазеров, см. рис. 5а

$$\hat{H} \approx \hat{H}_{\text{tr}} + \frac{\hbar \Omega}{2} \sum_{j=1,2} \left(\hat{C}_{1j} e^{-it\Delta} + \hat{C}_{3j} e^{it\Delta} + \hat{C}_{2j} e^{-it(\Delta+\delta)} + \hat{C}_{4j} e^{it(\Delta+\delta)} \right) |e_j\rangle\langle 2_j| + \text{h.c.}, \quad (2.16)$$

где $\hat{C}_{lj} = e^{ik_l \hat{z}_j + i\phi_l}$, ϕ_l - фаза l -го лазера, h. c. - комплексное сопряжение.

2.4.1. Адиабатическое приближение

Для компактности формул введём обозначение для частот, которые фигурировали в (2.16)

$$\{\Delta_l\} = \{-\Delta, -(\Delta + \delta), \Delta, \Delta + \delta\}. \quad (2.17)$$

Запишем уравнения Шредингера с гамильтонианом (2.16) для волновой функции $\tilde{\psi} = (A_2, A_e)^\top$:

$$\begin{cases} \dot{A}_2 = -i \frac{\Omega}{2} \sum_{l=1}^4 \hat{C}_l^\dagger e^{-it\Delta_l} A_e(t), & (2.18a) \\ \dot{A}_e = -i \frac{\Omega}{2} \sum_{m=1}^4 \hat{C}_m e^{it\Delta_m} A_2(t). & (2.18b) \end{cases}$$

Воспользуемся адиабатическим приближением и проинтегрируем выражение (2.18b)

$$A_e(t) \approx -\frac{\Omega}{2} \sum_{m=1}^4 \hat{C}_m \frac{e^{it\Delta_m} - 1}{\Delta_m} A_2(t). \quad (2.19)$$

Теперь временную зависимость $A_e(t)$ подставляем в (2.18a):

$$\dot{A}_2 = i A_2 \frac{\Omega^2}{4} \sum_{l=1}^4 \sum_{m=1}^4 \left(\hat{C}_l^\dagger \hat{C}_m e^{-it\Delta_l} \frac{e^{it\Delta_m} - 1}{\Delta_m} \right). \quad (2.20)$$

Снова используем приближение вращающейся волны для всех слагаемых, осциллирующих с частотами $\geq \Delta$. Также воспользуемся тем, что $\hat{C}_l \hat{C}_l^\dagger = \hat{1}$. Тогда можно записать эффективный гамильтониан, действующий на состояние $|2\rangle$:

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \frac{\hbar\Omega^2}{4} \left(\frac{1}{\Delta} (\hat{C}_1^\dagger \hat{C}_2 e^{-it\delta} - \hat{C}_3^\dagger \hat{C}_4 e^{it\delta}) + \frac{1}{\Delta + \delta} (\hat{C}_2^\dagger \hat{C}_1 e^{it\delta} - \hat{C}_4^\dagger \hat{C}_3 e^{-it\delta}) \right). \quad (2.21)$$

Чтобы посчитать $\hat{C}_1^\dagger \hat{C}_2$, вспомним их определение $\hat{C}_l = e^{ik_l \hat{z} + i\phi_l}$. Отсюда получим, используя рис. 5b,

$$\hat{C}_1^\dagger \hat{C}_2 = e^{i\Delta k \hat{z} - i\phi_{12}}, \quad \Delta k = k_{1z} - k_{2z} \approx k_{3z} - k_{4z} \approx 2k, \quad \phi_{12} = \phi_1 - \phi_2. \quad (2.22)$$

Здесь было использовано то, что отстройка Δ меньше оптических частот лазеров. Примем, что $\Delta \gg \delta$. Тогда можем в (2.21) пренебречь δ в знаменателе (2.21) и получить

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{eff}} &= 2\hbar\tilde{\Omega} (\cos(\Delta k \hat{z} + \delta t + \phi_{12}) - \cos(\Delta k \hat{z} - \delta t + \phi_{34})) |2\rangle\langle 2| \\ &= -4\hbar\tilde{\Omega} \sin(\delta t + \Delta\phi) \sin(\Delta k \hat{z} + \Phi) |2\rangle\langle 2|, \end{aligned} \quad (2.23)$$

где введены обозначения, от которых зависит двухкубитная операция:

$$\tilde{\Omega} = \frac{\Omega^2}{4\Delta} - \text{Эффективная ч-та Раби}, \quad \Phi = \frac{\phi_{12} + \phi_{34}}{2}, \quad \Delta\phi = \frac{\phi_{12} - \phi_{34}}{2}. \quad (2.24)$$

2.5. Приближение Лэмба-Дике

Как можно видеть из (2.23), можно избавиться от постоянного эффекта Штарка. Был получен эффективный гамильтониан, действующий на один ион и теперь необходимо перейти к рассмотрению полного гамильтониана

$$\hat{H} = \sum_{\nu} \hbar\omega_{\nu} \hat{a}_{\nu}^\dagger \hat{a}_{\nu} - 4\hbar\tilde{\Omega} \sum_{j=1,2} \sin(\delta t + \Delta\phi) \sin(\Delta k \hat{z}_j + \Phi) |2_j\rangle\langle 2_j|. \quad (2.25)$$

Рассмотрим движение ионов в терминах вторичного квантования, как это делалось в (1.24). Будем считать, что ионы находятся в режиме Лэмба-Дике, когда колебания ионов существенно меньше длины волны $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Это условие можно

переписать в простом виде:

$$\eta_j^{(\nu)} \sqrt{\langle (\hat{a}_\nu + \hat{a}_\nu^\dagger)^2 \rangle} \ll 1, \quad (2.26)$$

где введено обозначение для параметра Лэмба-Дике, которое связано с амплитудным вектором продольной моды ν (1.18):

$$\eta_j^{(\nu)} = \Delta k \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_\nu}} b_j^{(\nu)}. \quad (2.27)$$

Данного режима можно достичь, если перед операциями использовать доплеровское охлаждение и достичь малых колебательных чисел заполнения n_ν . Тогда можно переписать фазу $\Delta k \hat{z}_j$ в терминах мод:

$$\Delta k \hat{z}_j = \varphi_j + \sum_\nu \eta_j^{(\nu)} (\hat{a}_\nu + \hat{a}_\nu^\dagger), \quad (2.28)$$

где $\varphi_j = \Delta k z_{0j}$ и z_{0j} - положение равновесия j -го иона. Тогда (2.23) можно преобразовать:

$$\sin(\Delta k \hat{z}_j + \Phi) \approx \sum_\nu \eta_j^{(\nu)} (\hat{a}_\nu + \hat{a}_\nu^\dagger) \cos(\varphi_j + \Phi) + \sin(\varphi_j + \Phi). \quad (2.29)$$

Выберем координату первого иона за начало отсчёта: $z_{01} = 0$, тогда $\varphi_1 = 0$. Второй ион должен находиться, так чтобы $\varphi_2 = \pi(2l + 1)$. Однако, в системе возникает динамический эффект Штарка:

$$\hat{H}_{\text{ac-Stark}} = 4\hbar\tilde{\Omega} \sum_{j=1,2} (-1)^j \sin(\delta t + \Delta\phi) \sin(\Phi) |2_j\rangle\langle 2_j|. \quad (2.30)$$

Чтобы избавиться от него, необходимо регулировать фазы лазеров и выбрать $\Phi = 0$. Далее перейдём в представление взаимодействия с ловушкой в гамильтониане (2.26). В этом случае можно воспользоваться простым правилом, что достаточно домножить операторы рождения/уничтожения, $\hat{a}_\nu \rightarrow \hat{a}_\nu^{(\dagger)} e^{\mp i\omega_\nu t}$. Окончательно, можем получить фазовый гамильтониан

$$\hat{H}_{\text{ph}} = -4\hbar\tilde{\Omega} \sum_\nu \sum_{j=1,2} (-1)^j \eta_j^{(\nu)} (\hat{a}_\nu e^{-i\omega_\nu t} + \hat{a}_\nu^\dagger e^{i\omega_\nu t}) \sin(\delta t + \Delta\phi) |2_j\rangle\langle 2_j|. \quad (2.31)$$

Глава 3

Исследование достоверности двухкубитной фазовой операции

В данной главе будет изучена динамика фазового вентиля, изучение достоверности от параметров лазеров и исследование достоверности операции при наличии распадов с помощью численного моделирования.

3.1. Динамика фазового вентиля

В прошлой главе мы получили классический фазовый гамильтониан (2.31). Теперь следует понять, почему он так называется и получить эволюцию состояний от времени. Для этого воспользуемся разложением Магнуса [29]:

$$\hat{U}(t) = \exp\left(\sum \hat{M}_k(t)\right), \quad (3.1)$$

где введены \hat{M}_k . Приведем здесь первые два слагаемых:

$$\hat{M}_1(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt_1 \hat{H}_{\text{ph}}(t_1), \quad (3.2)$$

$$\hat{M}_2(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 [\hat{H}_{\text{ph}}(t_1), \hat{H}_{\text{ph}}(t_2)]. \quad (3.3)$$

Отметим что для $k > 2$ в операторах \hat{M}_k будут возникать коммутаторы вида $[\hat{H}_{\text{ph}}(t_1), [\hat{H}_{\text{ph}}(t_2), \dots]]$ и они будут давать нулевой вклад, т. к. $[\hat{a}, [\hat{a}, \hat{a}^\dagger]] = [\dots] = 0$. Поэтому остановимся на рассмотрении первых двух операторов.

Рассмотрим оператор \hat{M}_1 . Введём классические обозначения $\alpha_{\nu,j}(t)$:

$$\hat{M}_1(t) = \sum_{\nu,j} (\alpha_{\nu,j}(t) \hat{a}_\nu^\dagger - \alpha_{\nu,j}^*(t) \hat{a}_\nu) |2_j\rangle\langle 2_j| \quad (3.4)$$

Введём также разницу между частотами мод и отстройкой между лазерами $\mu_\nu = \delta - \omega_\nu$. Тогда коэффициенты $\alpha_{\nu,j}$ примут вид

$$\begin{aligned}\alpha_{\nu,j}(t) &= 4i(-1)^j \tilde{\Omega} \eta_j^{(\nu)} \int_0^t e^{i\omega_\nu t_1} \sin(\delta t_1 + \Delta\phi) dt_1 \\ &= 2i\tilde{\Omega} \eta_j^{(\nu)} (-1)^{j-1} \left(e^{i\Delta\phi} \frac{e^{i(2\omega_\nu + \mu_\nu)t} - 1}{2\omega_\nu + \mu_\nu} + e^{-i\Delta\phi} \frac{e^{-i\mu_\nu t} - 1}{\mu_\nu} \right)\end{aligned}\quad (3.5)$$

Рассмотрим резонансный случай, когда отстройка δ близка к частоте моды центра масс (1.19) т. е. $\mu = \delta - \omega_s \ll \omega_s$, тогда в Гамильтониане (2.31) можем оставить только резонансный член:

$$\hat{H}_{ph} \approx 2i\hbar\tilde{\Omega}\eta \left(\hat{a}_1 e^{i(\mu t + \Delta\phi)} - \hat{a}_1^\dagger e^{-i(\mu t + \Delta\phi)} \right) (|12\rangle\langle 12| - |21\rangle\langle 21|). \quad (3.6)$$

А коэффициент $\alpha_{1,j}$ можно будет переписать:

$$\alpha_{1,j} = 2i(-1)^{j-1} \tilde{\Omega} \eta e^{-i\Delta\phi} \frac{e^{-i\mu t} - 1}{\sqrt{N}\mu}. \quad (3.7)$$

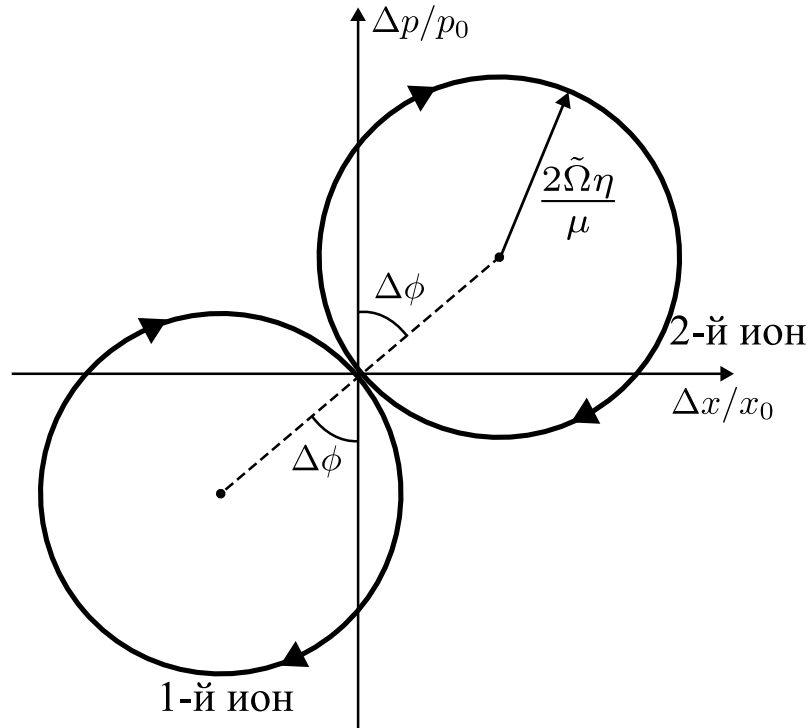


Рис. 6: Фазовая плоскость при проведении фазовой двухкубитной операции

Чтобы понять действие оператора $\exp(\hat{M}_1(t))$, заметим, что он совпадает с оператором сдвига

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}). \quad (3.8)$$

Действие оператора сдвига на операторы рождения и уничтожения [30]:

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a} \hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha, \quad \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a}^\dagger \hat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*. \quad (3.9)$$

Отсюда получим преобразование операторов координаты \hat{x} и импульса \hat{p} :

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{x} \hat{D}(\alpha) = \hat{x} + 2\text{Re}(\alpha)x_0, \quad \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{p} \hat{D}(\alpha) = \hat{p} + 2\text{Im}(\alpha)p_0, \quad (3.10)$$

где введены обозначения $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_s}}$ и $p_0 = \sqrt{\frac{\hbar m\omega_s}{2}}$. Тогда можем получить эволюцию координаты и импульса двух ионов, которую можно видеть на Рис. 6. При $t = \tau_g = 2\pi/\mu$ колебательное состояние возвращается в исходную точку, поэтому время проведения операции должно быть равно

$$t = n\tau_g, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.11)$$

Рассмотрим действие оператора $\hat{M}_2(t)$ в резонансном случае для гамильтониана (3.6). Пользуясь также свойством операторов рождения/уничтожения, $[\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] = 1$, получим, что коммутатор в (3.3) равен

$$[\hat{H}_{\text{ph}}(t_1), \hat{H}_{\text{ph}}(t_2)] \approx -8i(\hbar\tilde{\Omega}\eta)^2 \sin(\mu(t_1 - t_2))(|21\rangle\langle 21| + |12\rangle\langle 12|). \quad (3.12)$$

Отсюда получим выражение для оператора

$$\hat{M}_2(t) = i\chi(t)(|21\rangle\langle 21| + |12\rangle\langle 12|), \quad \text{где } \chi(t) = 4 \left(\frac{\tilde{\Omega}\eta}{\mu} \right)^2 (\mu t - \sin(\mu t)) \quad (3.13)$$

Получили, что на состояния $|21\rangle$ и $|12\rangle$ накручивается фаза $\chi(t)$. Напомним, что нас интересует время $t = \tau_g$, когда колебательные и ионные состояния распутываются:

$$\chi(\tau_g) = 8\pi \left(\frac{\tilde{\Omega}\eta}{\mu} \right)^2. \quad (3.14)$$

3.2. Оценка достоверности фазовой двухкубитной операции

Далее будет разобрано влияние приближений, которые были сделаны для получения желаемого фазового гейта. В прошлой главе мы получили, что за время $\tau_g = 2\pi/\mu$ в случае резонанса на состояния накрутится фаза $\chi(\tau_g)$ (3.14). Условие, при котором фаза будет равна $\pi/2$:

$$\mu = 4\tilde{\Omega}\eta. \quad (3.15)$$

Тогда после проведения обратных однокубитных операций (см. Рис. 5b) оператор эволюции фазового гейта будет равен

$$\hat{U}_{\text{ph}} = \text{diag}(1, i, i, 1). \quad (3.16)$$

Из этой формулы видно, что населённости уровней не изменяются, а меняется лишь относительная фаза состояний, поэтому данный двухкубитный гейт необходимо обложить однокубитными операциями [31].

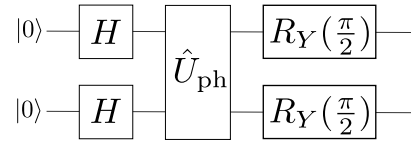


Рис. 7: Двухкубитная операция, в которой меняются населённости кубитных состояний.

На Рис. 7 введены известные однокубитные операции:

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad R_Y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \exp\left(i\frac{\pi}{4}\sigma_y\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

После проведения такой последовательности гейтов, если начальное состояние было $|\psi_0\rangle = |00\rangle$, в конце будет получено максимально запутанное состояние:

$$|\psi_{\text{id}}\rangle = \frac{|00\rangle - i|11\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (3.18)$$

Для оценки качества квантовой операции используется достоверность (в иностранной литературе принято называть *fidelity*):

$$F_{\psi_{\text{id}}}(\hat{\rho}) = \langle \psi_{\text{id}} | \hat{\rho} | \psi_{\text{id}} \rangle, \quad (3.19)$$

, где $\hat{\rho}$ - матрица плотности полученного состояния. Данная формула справедлива, лишь когда идеальное состояние - чистое. Как можно видеть, если операция проведена без ошибок, достоверность должна быть равна 1. Приведём здесь список причин, из-за которых возникают ошибки в двухкубитной операции:

1. Спонтанные распады с уровней $|e\rangle$ и $|2\rangle$
2. Вклад первого слагаемого в формуле (3.5)
3. Вклад остальных колебательных мод
4. Нарушение приближения Лэмба-Дике

Приведём оценку ошибки ввиду спонтанных распадов с уровня $|e\rangle$, так как при неправильном выборе отстройки Δ данный вклад будет значительным [24]:

$$\epsilon \equiv 1 - F \propto \left(\frac{\Omega}{\Delta}\right)^2 \Gamma_e \tau_g \propto \frac{\Gamma_e}{\Delta}, \quad (3.20)$$

где было использовано определение эффективной частоты Раби (2.24). Данная оценка показывает, что ошибка обратно пропорциональна отстройке Δ при постоянном времени гейта. Отсюда можем получить зависимость мощности лазера:

$$\tau_g = \frac{2\pi}{\mu} = \text{const} \Rightarrow \Omega^2 \propto P \propto \Delta. \quad (3.21)$$

Отсюда можно сделать вывод, что с увеличением отстройки требуется также и увеличение мощности, поэтому значит требование в разделении двухкубитной операции и индивидуальной адресации обосновано.

3.3. Численное моделирование двухкубитного фазового гейта

После рассмотрения влияния отстройки фазового гейта на достоверность, требуется проверить это численно. Для этого с помощью библиотеки QuTiP [32] проводилось численное моделирование идеального случая, то есть гамильтониана из (3.6). Также проводилось численное моделирование гамильтониана (2.16) для двух ионов до адиабатического приближения. Это необходимо, так как именно до адиабатического приближения в системе присутствует уровень

$|e\rangle$, с которого происходят самые интенсивные распады, влияние которых необходимо учитывать. Для расчёта эволюции диссипативной системы используется уравнение Линдблада [33]:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \rho] + \frac{1}{2} \sum_j \left([\hat{L}_j, \rho \hat{L}_j^\dagger] + [\hat{L}_j \rho, \hat{L}_j^\dagger] \right), \quad (3.22)$$

где \hat{H} - гамильтониан (2.16), \hat{L}_j - операторы Линдблада. В работе рассматриваются спонтанные распады из состояний $|2\rangle$ и $|e\rangle$. Поэтому операторы Линдблада для 1-го иона запишутся в виде

$$\hat{L}_1 = \sqrt{\frac{\alpha_{3/2}\Gamma_e}{\hbar}} |1_1\rangle\langle e_1|, \quad \hat{L}_2 = \sqrt{\frac{(1 - \alpha_{3/2})\Gamma_e}{\hbar}} |2_1\rangle\langle e_1|, \quad \hat{L}_3 = \sqrt{\frac{\Gamma_2}{\hbar}} |1_1\rangle\langle 2_1|, \quad (3.23)$$

где Γ_2 и Γ_e - ширины уровней $|2\rangle$ и $|e\rangle$ соответственно, $\alpha_{3/2}$ - вероятность распада $|e\rangle \rightarrow |1\rangle$. Значения данных величин обсуждались в начале второй главы. За начальное колебательное состояние в моделировании используется тепловое состояние с $\bar{n} = 0.01$, секулярная частота $\omega_s = 2\pi \cdot 450$ КГц и радиус перетяжки лазерных пучков $w_0 = 100$ мкм. Кроме того для перехода $|2\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ необходимо знать точное значение для частоты Раби:

$$\Omega = \sqrt{\frac{2\pi c^2 \Gamma_e}{\hbar \omega_0^3} \cdot \frac{2P_0}{\pi w_0^2}}. \quad (3.24)$$

На рис. 8 приведены графики зависимости для двух разных отстроек. Как можно видеть, при увеличении отстройки в 100 раз, достоверность существенно улучшилась. Дальнейшее увеличение отстройки сопровождается большим временем моделирования, поэтому было решено остановиться на $\Delta = 2\pi \cdot 100$ ГГц. Также на рис. 8b можно видеть, что присутствуют малые осцилляции, которые можно объяснить влиянием второго слагаемого в (3.5). Кроме того, не было учтено влияние других мод.

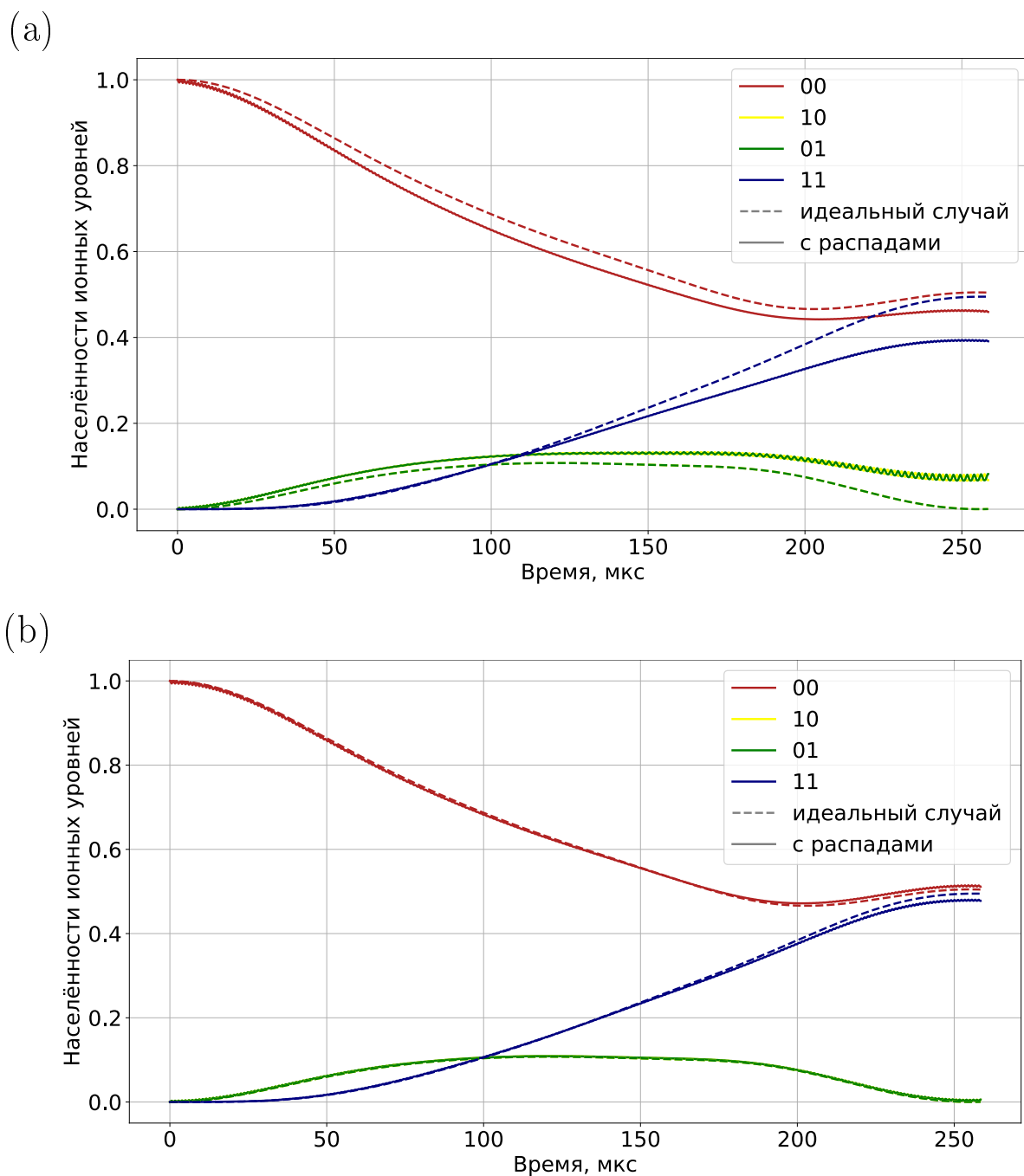


Рис. 8: Зависимости населённостей ионных уровней от времени для идеального случая и для системы с распадами до адиабатического приближения, посчитанных с помощью численного моделирования. Параметры гейта для рисунка (а): $\Delta = 2\pi \cdot 1$ ГГц, мощность лазера в пересчёте на 1 пучок $P_0 = 0.2$ мВт, и время гейта равно 258 мкс. Достоверность равна $F = 0.788$. Параметры гейта для рисунка (b): Параметры гейта: $\Delta = 2\pi \cdot 100$ мощность лазера в пересчёте на 1 пучок $P_0 = 20$ мВт, и время гейта равно 258 мкс. Достоверность равна $F = 0.987$.

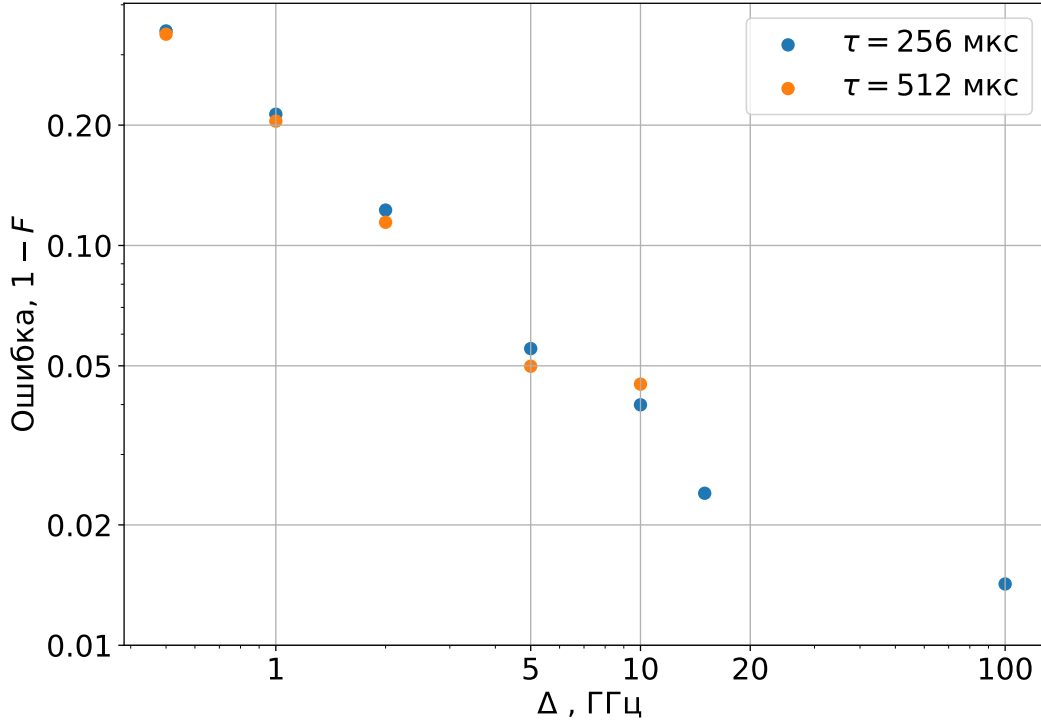


Рис. 9: Зависимость ошибки операции от отстройки Δ в логарифмическом масштабе для двух различных времён гейта $\tau_g = 258$ мкс и $\tau_g = 516$ мкс. Мощность одного лазера изменялась в диапазоне от 25 мкВт до 20 мВт.

Для анализа ошибки операции были выбраны два различных времени, при которых гейт можно считать Адиабатическим и использовать все приближения, которые применялись в работе. Ошибка операции считалась с помощью численного моделирования для разных отстроек, результат можно видеть на Рис. 9. Как можно видеть, зависимость ошибки операции совпадает с теоретической оценкой при достаточно малых отстройках. При достижении $\Delta = 100$ ГГц вклад от спонтанных распадов перестаёт быть основным и в этом случае для уменьшения ошибки требуется использовать лазерные импульсы с переменной мощностью [34].

Заключение

В данной работе была изучена двухкубитная фазовая операция на 935-м переходе на ионах $^{171}\text{Yb}^+$. Был проведён теоретический вывод фазового гамильтониана для симметричного случая, используя ряд приближений: адиабатическое приближение, приближение вращающейся волны и приближение Лэмба-Дике. Была предложена симметричная схема, позволяющая избавиться от эффекта Штарка.

Данная операция позволит создать масштабируемый квантовый компьютер на ионах, так как при проведении вычислений адресация ионов и сам двухкубитный гейт проводятся поэтапно. Поэтому от экспериментальной установки требуется лишь адресация одиночных пучков, что существенно проще. Данную операцию можно делать и на других ионах, главное требование - наличие относительно долгоживущего возбуждённого уровня, на котором будет проводиться операция.

В данной работе было проведено численное моделирование для проверки возможности реализации двухкубитного гейта с высокой точностью. На Рисунке 8b можно видеть результаты: при достаточно большой отстройке возможна операция с достоверностью $F = 0.987$. Рисунок 9 подтверждает характерную зависимость ошибки операции (3.20) от отстройки от верхнего уровня для двух различных времён гейта. Данная зависимость показывает, что операция будет тем точнее, чем больше будет отстройка, однако для сохранения времени операции необходимо также увеличивать и мощность лазеров. При масштабировании квантового компьютера время операции требуется существенно уменьшать, вплоть до значений, при которых ионы успевают сделать только одно колебание, то есть $\tau_g^{-1} \sim \omega_s$. В этом случае необходимо учитывать влияние других мод.

Продолжением данной работы будет осуществление двухкубитной операции на экспериментальной установке и проверка полученных теоретических расчётов. Следующим шагом будет проведение быстрых гейтов, что позволит существенно улучшить качество проведения двухкубитных операций на ионном квантовом компьютере.

Список литературы

1. *Shor P.* Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring // Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science. — 1994. — С. 124—134. — DOI: [10.1109/SFCS.1994.365700](https://doi.org/10.1109/SFCS.1994.365700).
2. *Milanov E.* The RSA algorithm // RSA laboratories. — 2009. — С. 1—11.
3. Realization of a scalable Shor algorithm / Т. Monz [и др.] // Science. — 2016. — Т. 351, № 6277. — С. 1068—1070.
4. *Grover L. K.* A fast quantum mechanical algorithm for database search // Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing. — 1996. — С. 212—219.
5. *Feynman R. P.* Quantum mechanical computers. // Found. Phys. — 1986. — Т. 16, № 6. — С. 507—532.
6. Analogue quantum chemistry simulation / J. Argüello-Luengo [и др.] // Nature. — 2019. — Т. 574, № 7777. — С. 215—218.
7. *Han K.-H., Kim J.-H.* Quantum-inspired evolutionary algorithm for a class of combinatorial optimization // IEEE transactions on evolutionary computation. — 2002. — Т. 6, № 6. — С. 580—593.
8. *DiVincenzo D. P.* The physical implementation of quantum computation // Fortschritte der Physik: Progress of Physics. — 2000. — Т. 48, № 9—11. — С. 771—783.
9. *Knill E., Laflamme R.* Theory of quantum error-correcting codes // Physical Review A. — 1997. — Т. 55, № 2. — С. 900.
10. *Moskalenko Ilya N e. a.* High fidelity two-qubit gates on fluxoniums using a tunable coupler // npj Quantum Information. — 2022. — Т. 8, № 1. — С. 130.
11. Demonstration of the trapped-ion quantum CCD computer architecture / J. M. Pino [и др.] // Nature. — 2021. — Т. 592, № 7853. — С. 209—213.
12. Probing many-body dynamics on a 51-atom quantum simulator / Н. Bernien [и др.] // Nature. — 2017. — Т. 551, № 7682. — С. 579—584.
13. Quantum computational advantage using photons / H.-S. Zhong [и др.] // Science. — 2020. — Т. 370, № 6523. — С. 1460—1463.

14. Robust 2-qubit gates in a linear ion crystal using a frequency-modulated driving force / P. H. Leung [и др.] // Physical review letters. — 2018. — Т. 120, № 2. — С. 020501.
15. *Cirac J. I., Zoller P.* Quantum computations with cold trapped ions // Physical review letters. — 1995. — Т. 74, № 20. — С. 4091.
16. *Paul W.* Electromagnetic traps for charged and neutral particles // Reviews of modern physics. — 1990. — Т. 62, № 3. — С. 531.
17. Single ion qubit with estimated coherence time exceeding one hour / P. Wang [и др.] // Nature communications. — 2021. — Т. 12, № 1. — С. 233.
18. Realizing quantum gates with optically addressable Yb⁺ 171 ion qudits / M. Aksenov [и др.] // Physical Review A. — 2023. — Т. 107, № 5. — С. 052612.
19. *Ralph T., Resch K., Gilchrist A.* Efficient Toffoli gates using qudits // Physical Review A. — 2007. — Т. 75, № 2. — С. 022313.
20. Optimization of the Readout Fidelity of the Quantum State of an Optical Qubit in the 171 Yb⁺ Ion / N. V. Semenin [и др.] // JETP Letters. — 2021. — Т. 114. — С. 486—492.
21. *Нильсен М., Чанг И.* Квантовые вычисления и квантовая информация // Т. 824. — М.: Мир, 2006. — С. 244—247.
22. *Sørensen A., Mølmer K.* Quantum computation with ions in thermal motion // Physical review letters. — 1999. — Т. 82, № 9. — С. 1971.
23. Experimental demonstration of a robust, high-fidelity geometric two ion-qubit phase gate / D. Leibfried [и др.] // Nature. — 2003. — Т. 422, № 6930. — С. 412—415.
24. High-fidelity light-shift gate for clock-state qubits / C. Baldwin [et al.] // Physical Review A. — 2021. — Vol. 103. — P. 012603.
25. *Schiffner J.* Phase transitions in anisotropically confined ionic crystals // Physical review letters. — 1993. — Т. 70, № 6. — С. 818.
26. Quantum dynamics of single trapped ions / D. Leibfried [и др.] // Reviews of Modern Physics. — 2003. — Т. 75, № 1. — С. 283—285.
27. *Steck D. A.* Quantum and atom optics. — 2007.

28. Realizing quantum gates with optically addressable Yb⁺ 171 ion qudits / M. Aksenov [и др.] // Physical Review A. — 2023. — Т. 107, № 5. — С. 052612.
29. *Magnus W.* On the exponential solution of differential equations for a linear operator // Communications on pure and applied mathematics. — 1954. — Т. 7, № 4. — С. 649—673.
30. *Gerry C., Knight P., Knight P. L.* Introductory quantum optics //. — Cambridge university press, 2005. — С. 49—50, 155.
31. Controlled long-range interactions between Rydberg atoms and ions / T. Secker [и др.] // Physical Review A. — 2016. — Т. 94, № 1. — С. 013420.
32. *Johansson J. R., Nation P. D., Nori F.* QuTiP: An open-source Python framework for the dynamics of open quantum systems // Computer Physics Communications. — 2012. — Т. 183, № 8. — С. 1760—1772.
33. *Gorini V., Kossakowski A., Sudarshan E. C. G.* Completely positive dynamical semigroups of N-level systems // Journal of Mathematical Physics. — 1976. — Т. 17, № 5. — С. 821—825.
34. *Manning T. A.* Quantum information processing with trapped ion chains / Manning Timothy Andrew. — 2014. — С. 96—112.