
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра квантовой радиофизики

Направление подготовки / специальность: 03.03.01 Прикладные математика и физика
Направленность (профиль) подготовки: Общая и прикладная физика

ГЛУБОКОЕ ЛАЗЕРНОЕ ОХЛАЖДЕНИЕ ИОНОВ YB171 ДЛЯ ЗАДАЧ КВАНТОВОЙ ЛОГИКИ

(бакалаврская работа)

Студент:

Смирнов Василий Николаевич

(подпись студента)

Научный руководитель:

Семериков Илья Александрович,

(подпись научного руководителя)

Консультант (при наличии):

(подпись консультанта)

Москва 2022

Содержание

Введение	3
Глава 1. Теория лазерного охлаждения ионов	5
1.1 Взаимодействие иона с лазерным излучением	5
1.2 Доплеровское охлаждение ионов	9
1.3 Вывод формулы для частот Раби	11
1.4 Методы измерения малых средних колебательных чисел	13
Глава 2. Численный расчет охлаждения иона $^{171}\text{Yb}^+$	15
2.1 Схема охлаждения иона $^{171}\text{Yb}^+$ до основного колебательного состояния	15
2.2 Построение модели охлаждения	15
2.3 Поиск оптимальной последовательности импульсов	18
2.4 Моделирование процессов перекачки	24
2.5 Преобразование к вращающейся системе отсчета	25
2.6 Вычисление величины паразитных нагревов	28
2.7 Учет паразитных нагревов	31
Глава 3. Эксперимент по охлаждению иона $^{171}\text{Yb}^+$	32
3.1 Сравнение значений средних колебательных чисел	32
3.2 Сравнение населенностей основного колебательного состояния из экспериментальных и теоретических данных	34
Заключение	36
Список литературы	37

Введение

Создание квантового компьютера, на сегодняшний день, является одной из наиболее популярных задач в экспериментальной физике. Ионы, захваченные в ловушку Пауля, представляют собой перспективную платформу для реализации квантовых алгоритмов. Они удовлетворяют т.н. критериям ДиВинченцо [1] – общепринятым критериям пригодности физической системы для квантовых вычислений. Кроме того, с момента изобретения в 1953 году Вольфгангом Паулем метода удержания заряженных частиц (ловушки Пауля)[2], технологии сильно развились. Теперь ионы, захваченные в радиочастотную ловушку, представляют собой удобную в обращении, точно контролируруемую квантовую систему

Движение ионов в ловушке является периодическим и схоже с поведением гармонического осциллятора [3]. Число колебательных мод ионного кристалла совпадает с количеством ионов в этом кристалле. В задачах квантовой логики используется явление "квантовой запутанности"[4]. Поскольку колебания в радиочастотном потенциале являются общими для всех ионов кристалла, именно колебательные моды используются для достижения квантовой запутанности. Достоверность квантовых операций с использованием двух кубитов(ионов) зависит от того, насколько точно мы подготавливаем начальное колебательное состояние. В качестве удобного начального состояния обычно используют основное колебательное состояние. Поскольку это нижнее энергетическое состояние, то при эффективном отборе энергии из колебательной моды, достигается его высокая населенность.

Целью данной работы является изучение методов достижения основного колебательного состояния, а именно теоретическое и экспериментальное изучение глубокого лазерного охлаждения ионов, захваченных в ловушку Пауля, на боковых частотах. Лазерное охлаждение на боковых частотах является концептуально наиболее простым и эффективным.

Движение иона в потенциале ловушки есть композиция колебаний на множестве частот. Наименьшая из них называется секулярной и в дальнейшем обозначается ω_{sec} . Если ширина некоторого перехода оказывается меньше величины $\hbar\omega_{sec}$, то спектр возбуждения этого перехода представляется в виде равноотстоящих ступенек - разрешенных боковых частот. Если лазерное излучение отстроено по частоте на $m \cdot \omega_{sec}$ в меньшую сторону от резонанса электронного перехода в ионе, то при возбуждении системы ион потеряет m колебательных квантов. Чтобы повторить операцию, требуется после

возбуждения переводить ион в начальное электронное состояние. Режим разрешенных боковых частот выполняется только для достаточно узких переходов, а время жизни на них велико, поэтому при подготовке начального состояния возбуждаются вспомогательные уровни. Спонтанные распады с них приводят к тому, что ион в конечном итоге попадает в требуемое состояние. Многократное повторение такой последовательности операций приводит к эффективному охлаждению иона. Предельно достижимая температура ограничивается паразитными нагревами. Основные вклады в нагрев системы вносят нерезонансные возбуждения и распады при подготовке начального состояния, а также нагревы от ловушки.

В первой главе кратко излагаются теоретические сведения о предварительном охлаждении до доплеровского предела, режимах взаимодействия иона с излучением при охлаждении на боковых частотах, а также способах измерения достигнутого среднего колебательного числа. Во второй главе представлена схема уровней иона $^{171}\text{Yb}^+$, описаны используемые переходы, произведено численное моделирование эволюции заселенности колебательных уровней от времени в упрощенной модели, найдены времена перекачки населенности в начальное состояние после возбуждения. В конце главы определены величины паразитных нагревов, возникающих при перекачке. Последовательность повторно промоделирована с учетом нагревов. В третьей главе произведено сравнение экспериментальных данных с теоретической моделью.

Расчетная часть работы была проделана автором лично, экспериментальная часть проводилась при непосредственном участии автора.

Глава 1

Теория лазерного охлаждения ионов

1.1 Взаимодействие иона с лазерным излучением

Для описания процесса охлаждения иона до основного колебательного состояния требуется установить характер взаимодействия иона в потенциале ловушки с лазерным полем. В связи с этим, важно определить гамильтониан системы "ион+ловушка+поле". В данном разделе сперва выводится гамильтониан иона в ловушке, а затем добавляется часть, отвечающая за взаимодействие с оптическим полем.

Запишем движение частицы в квадрупольном потенциале. Согласно [5] гамильтониан может быть представлен в виде

$$H_{trap} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m}{2}W(t)\hat{x}^2, \quad (1)$$

где

$$W(t) = \frac{\omega_{rf}^2}{4}(a + 2q \cos(\omega_{rf}t)), \quad (2)$$

\hat{p} , \hat{x} - операторы импульса и координаты частицы, m - ее масса, a и q - параметры, зависящие от напряжения и частоты поля (ω_{rf}), приложенного к ловушке, заряда частицы и ее массы. Уравнения движения в Гейзенберговском представлении имеют вид:

$$\frac{d\hat{x}_H}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{p}_H, \hat{H}_{trap}] = \frac{\hat{p}_H}{m}, \quad (3)$$

$$\frac{d\hat{p}_H}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{x}_H, H_{trap}] = -mW(t)\hat{x}_H. \quad (4)$$

Объединяя уравнения (3) и (4) находим

$$\frac{d^2\hat{x}_H}{dt^2} + W(t)\hat{x}_H = 0. \quad (5)$$

Заметим, что если оператор \hat{x} заменить на некоторую функцию $u(x)$, получается известное уравнение Матье. Согласно теореме Флоке общее решение для стабильного случая может быть записано как бесконечный гармонический ряд по t [3]:

$$u(t) = Ae^{i\beta(a,q)t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{2n}(a, q)e^{i2nt} + Be^{-i\beta(a,q)t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{2n}(a, q)e^{-i2nt}. \quad (6)$$

Здесь β принимает действительные значения и вместе с C_{2n} зависит от параметров a и q , а A и B - некторые константы, используемые для нормировки решения. Рассматриваются следующие начальные условия

$$u(0) = 1, \quad \dot{u}(0) = iv, \quad (7)$$

где

$$u(0) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_{2n} = 1, \quad v = \omega_{rf} \sum_{-\infty}^{\infty} C_{2n}(\beta/2 + n) = 1 \quad (8)$$

Для них решение имеет общий вид

$$u(t) = e^{i\beta\omega_{rf}t/2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{2n} e^{in\omega_{rf}t} = e^{i\beta\omega_{rf}t/2} \Phi(t), \quad (9)$$

где $\Phi(t)$ - имеет период $T = 2\pi/\omega_{rf}$. Если подставить выражение (9) в равенства для начальных условий (7), получатся условия для коэффициентов C_{2n}

$$u(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n} = 1, \quad v = \omega_{rf} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n}(\beta/2 + n). \quad (10)$$

Поскольку решение (9) и его комплексно сопряженное являются линейно независимыми решениями дифференциального уравнения, можно записать неравенство нулю и сохранение вронскиана вдоль решения:

$$u^*(t)\dot{u}(t) - u(t)\dot{u}^*(t) = u^*(0)\dot{u}(0) - u(0)\dot{u}^*(0) = 2iv. \quad (11)$$

Как отмечалось ранее, функции $u(t)$ и $\hat{x}(t)$ решают одно и то же уравнение. В таком случае их линейная комбинация будет пропорциональна вронскиану (10) и не будет зависеть от времени

$$\hat{C}(t) = \sqrt{\frac{m}{2\hbar v}} i(u(t)\frac{d\hat{x}(t)}{dt} - \dot{u}(t)\hat{x}(t)). \quad (12)$$

С учетом (3),(4) и (7), выражение (12) упрощается до

$$\hat{C}(t) = \hat{C}(0) = \sqrt{\frac{m}{2\hbar v}} \left(vx(0) + i\frac{p(0)}{m} \right). \quad (13)$$

Величина $\hat{C}(t)$ представляет собой оператор уничтожения для гармонического осциллятора с массой m и частотой v . В дальнейших выкладках производится переобозначение $\hat{C} = \hat{a}$. Используя коммутационное соотношение $[a(t), a^\dagger(t)] = 1$ можно выразить операторы координаты и импульса через функцию $u(t)$, а также операторы рождения и уничтожения

$$\hat{x}_H = \sqrt{\frac{\hbar}{2mv}} (\hat{a}u^*(t) + \hat{a}^\dagger u(t)), \quad (14)$$

$$\hat{p}_H = \sqrt{\frac{\hbar m}{2v}} (\hat{a} \dot{u}^*(t) + \hat{a}^\dagger \dot{u}(t)). \quad (15)$$

Теперь необходимо рассмотреть взаимодействие иона с лазерным полем. В упрощенной модели электронная структура представляется как двухуровневая система. Гамильтониан системы «ион+ловушка+поле» распадается на три компоненты: движение во внешнем потенциале, взаимодействие с излучением, электронная структура. Гамильтониан электронной структуры записывается как

$$\hat{H}_{el} = \hbar\omega_{el} \frac{\sigma_z}{2} = \hbar\omega_{el} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где ω_{el} – частота атомного перехода. Часть гамильтониана, относящаяся к взаимодействию с оптическим полем, имеет вид:

$$\hat{H}_{int} = \frac{\hbar}{2} \omega_R (\sigma_- + \sigma_+) (e^{i(k\hat{x}_S - \omega t + \phi)} + e^{-i(k\hat{x}_S - \omega t + \phi)}). \quad (17)$$

Здесь ω_R – частота осцилляций Раби, ω и ϕ – частота и фаза падающего излучения, k – соответствующий волновой вектор, \hat{x}_S – оператор координаты в представлении Шредингера. При переходе к представлению взаимодействия со свободным гамильтонианом $\hat{H}_0 = \hat{H}_{trap} + \hat{H}_{el}$ производится унитарное преобразование

$$\hat{U}_0 = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t}. \quad (18)$$

Получается следующее выражение:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{U}_0^\dagger \hat{H}_{int} \hat{U}_0 = \\ &= \frac{\hbar}{2} e^{\frac{i}{\hbar} H_{el} t} (\sigma_- + \sigma_+) e^{-\frac{i}{\hbar} H_{el} t} e^{\frac{i}{\hbar} H_m t} (e^{i(k\hat{x}_S - \omega t + \phi)} + e^{-i(k\hat{x}_S - \omega t + \phi)}) e^{-\frac{i}{\hbar} H_m t}. \end{aligned} \quad (19)$$

Далее (19) упрощается при помощи свойств σ -матриц [6]

$$e^{\alpha\sigma_z} \sigma_+ e^{-\alpha\sigma_z} = e^{2\alpha\sigma_z} \sigma_+, \quad (20)$$

$$e^{\alpha\sigma_z} \sigma_- e^{-\alpha\sigma_z} = e^{2\alpha\sigma_z} \sigma_-. \quad (21)$$

В результате Гамильтониан приобретает вид:

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \omega_R (\sigma_+ e^{i\omega_{el} t} + \sigma_- e^{-i\omega_{el} t}) (e^{i(k\hat{x}_S - \omega t + \phi)} + e^{-i(k\hat{x}_S - \omega t + \phi)}). \quad (22)$$

Длина волны лазерного излучения близка к длине волны электронного перехода, тогда частоты $\omega - \omega_{el}$ являются малыми, а $\omega + \omega_{el}$ большими. В приближении

вращающейся волны отбрасываются быстро осциллирующие члены, а гамильтониан упрощается до

$$\hat{H} \approx \frac{\hbar}{2} \omega_R (\sigma_+ e^{i(-\delta\omega t + k\hat{x}_S + \phi)} + \sigma_- e^{-i(-\delta\omega t + k\hat{x}_S + \phi)}), \quad (23)$$

где $\delta\omega = \omega - \omega_{el}$.

В дальнейших преобразованиях вводится параметр Лэмба-Дике $\eta = kx_0$. Здесь $x_0 = \sqrt{\hbar/2m\omega_{sec}}$ - амплитуда нулевых колебаний иона в ловушке, $\omega_{sec} = \beta\omega_{rf}/2$ - секулярная частота движения иона в ловушке. Тогда гамильтониан принимает вид

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \omega_R (\sigma_+ e^{i(-\delta\omega t + \eta(\hat{a}u^*(t) + \hat{a}^\dagger u(t)) + \phi)} + \sigma_- e^{-i(-\delta\omega t + \eta(\hat{a}u^*(t) + \hat{a}^\dagger u(t)) + \phi)}). \quad (24)$$

Рассматривается разложение в ряд Тейлора экспоненциальных множителей

$$e^{i\eta(\hat{a}u^*(t) + \hat{a}^\dagger u(t))} = \sum_0^\infty \frac{(i\eta)^m}{m!} \left(\hat{a} e^{-i\frac{\beta\omega_{rf}}{2}t} \sum_{-\infty}^\infty C_{2n}^* e^{-in\omega_{rf}t} + \text{c.c.} \right)^m. \quad (25)$$

Видно, что при частотах $\delta\omega$ удовлетворяющих выражению

$$\delta\omega = (c_1 + \frac{c_2\beta}{2})\omega_{rf} \quad (26)$$

все, кроме двух, слагаемые быстро осциллируют. Ими, как и раньше, можно пренебречь.

Коэффициент c_3 связан с т.н. микродвижением. Коэффициент c_2 полагается равным единице. В этом случае $q \ll 1$, $|a| \ll 1$, $u = e^{i\omega_{sec}t}/(1 + q/2)$. С такими условиями гамильтониан приобретает вид

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_R}{2(1 + q/2)} (\hat{\sigma}_+ e^{i\eta(\hat{a}e^{-i\omega_{sec}t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega_{sec}t})} e^{i(\phi - \delta t)} + \text{c.c.}). \quad (27)$$

Наконец, если мы находимся в режиме Лэмба-Дике, т.е. область локализации иона много меньше длины волны падающего излучения, показатель экспоненты $\eta(\hat{a}e^{-i\omega_{sec}t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega_{sec}t}) \ll 1$. Следовательно, можно оставить только первый член разложения в выражении (27). В таком режиме вероятность спонтанных процессов распада из возбужденного состояния с изменением колебательного состояния исчезающе мала. С учетом вышеописанного приближения, гамильтониан принимает окончательный вид

$$\hat{H}_{fin} = \frac{\hbar\omega_R}{2(1 + q/2)} (\hat{\sigma}_+ (1 + i\eta(\hat{a}e^{-i\omega_{sec}t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega_{sec}t})) e^{i(\phi - \delta t)} + \hat{\sigma}_- (1 - i\eta(\hat{a}e^{-i\omega_{sec}t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega_{sec}t})) e^{i(\phi - \delta t)}). \quad (28)$$

В этом гамильтониане остаются 3 резонансных члена:

$$\hat{H}_0 = \frac{\hbar\omega_R}{2(1+q/2)}(\hat{\sigma}_+e^{i\phi} + \hat{\sigma}_-e^{-i\phi}), \quad (29)$$

$$\hat{H}_- = \frac{\hbar\omega_R\eta}{2(1+q/2)}(\hat{a}\hat{\sigma}_+e^{i\phi} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-e^{-i\phi}), \quad (30)$$

$$\hat{H}_+ = \frac{\hbar\omega_R\eta}{2(1+q/2)}(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_+e^{i\phi} + \hat{a}\hat{\sigma}_-e^{-i\phi}). \quad (31)$$

Выделенные части гамильтониана будут отвечать переходам без изменения колебательного числа - \hat{H}_0 , с его увеличением - \hat{H}_+ , а так же с уменьшением - \hat{H}_- . Таким образом, показано, что при возбуждении электронного перехода излучением с частотой, отстроенной на ω_{sec} в меньшую сторону от резонанса, переход произойдет с потерей колебательного кванта.

При выводе выражений использовались приближения, которые справедливы для иона, находящегося в режиме Лэмба-Дике. Этот режим достигается путем предварительного доплеровского охлаждения. Данный процесс описан в следующей секции.

1.2 Доплеровское охлаждение ионов

В основе данного метода охлаждения лежит эффект Доплера - частота, детектируемая подвижным приемником, отличается от излучаемой в зависимости от скорости этого приемника. Подвижные ионы как раз представляют собой подвижный приемник. Излучение, отстроенное в область более низких частот относительно резонансной частоты атомного перехода, будет эффективно поглощаться, летящим на встречу ионом. В результате поглощения фотона, импульс иона уменьшится. Последующее переизлучение предполагается изотропным. В результате, импульс иона, хотя и уменьшается, испытывает случайные блуждания в фазовом пространстве. В дальнейшем будет показано, что данное явление будет ограничивать предельную температуру охлаждения.

Если предположить, что скорость иона слабо меняется за единичный цикл поглощения и переизлучения, то эффект представим в виде некоторой эффективной силы. Такое предположение справедливо в случае, когда период колебаний атома много больше времени этих процессов, т.е. частота иона много меньше ширины охлаждающего перехода. Ион теряет импульс $\hbar\mathbf{k}$ (\mathbf{k} – волновой вектор лазерного излучения) с вероятностью в единицу времени, равной ΓP_e , где Γ – скорость спонтанных распадов, а P_e – вероятность нахождения иона в возбужденном состоянии. Такая вероятность задается

формулой [7]

$$P_e = \frac{s/2}{1 + s + (2\delta_{\text{eff}}/\Gamma)^2}. \quad (32)$$

Здесь s - параметр насыщения, определяемый интенсивностью излучения, а $\delta_{\text{eff}} = \Delta - \mathbf{k}\mathbf{v} = \omega - \omega_0 - \mathbf{k}\mathbf{v}$ - эффективная отстройка, где ω - частота лазерного излучения, ω_0 - резонансная частота атомного перехода, а \mathbf{v} - скорость иона. Раскладывая вероятность P_e в первом порядке по \mathbf{v} , можно получить следующее выражение для эффективной силы:

$$F_a = \hbar k \Gamma P_e = F_0(1 + \kappa v). \quad (33)$$

Здесь v - модуль скорости иона,

$$\kappa = \frac{8k\Delta/\Gamma^2}{1 + s + (2\Delta/\Gamma)^2}, \quad (34)$$

а коэффициент F_0 выражается как

$$F_0 = \hbar k \Gamma \frac{s/2}{1 + s + (2\Delta/\Gamma)^2}. \quad (35)$$

Из выражения (34) видно, что коэффициент κ не зависит от скорости. В таком случае величина F_a имеет смысл вязкой силы трения. Теперь можно узнать мощность охлаждения, усреднив выражение $F_a v$ по периоду движения иона:

$$\dot{E}_c = \langle F_a v \rangle = F_0(\langle v \rangle + \kappa \langle v^2 \rangle) = F_0 \kappa \langle v^2 \rangle \quad (36)$$

В виду периодичности движения в ловушке среднее значение скорости $\langle v \rangle$ равно нулю. Хотя значение (36) всегда положительно, существует предел охлаждения данным методом. Он обусловлен, как говорилось ранее, дрейфом в пространстве импульсов в результате спонтанных распадов. Мощность нагрева, вызываемая данным эффектом пропорциональна частоте взаимодействий

$$\dot{E}_h = 2 \frac{(\hbar k)^2}{2m} \Gamma P_e. \quad (37)$$

Здесь $(\hbar k)^2/m$ - энергия отдачи, приобретаемая ионом в результате цикла поглощения-испускания. Таким образом, конечная температура устанавливается при выравнивании мощностей охлаждения и нагрева

$$\dot{E}_c = \dot{E}_h. \quad (38)$$

После подстановки выражений из (36) и (38) в (42) получается

$$k_B T = m \langle v^2 \rangle = -\frac{\hbar k}{\kappa} = -\frac{\hbar \Gamma}{8} \left[(1 + s) \frac{\Gamma}{\Delta} + \frac{4\Delta}{\Gamma} \right] \quad (39)$$

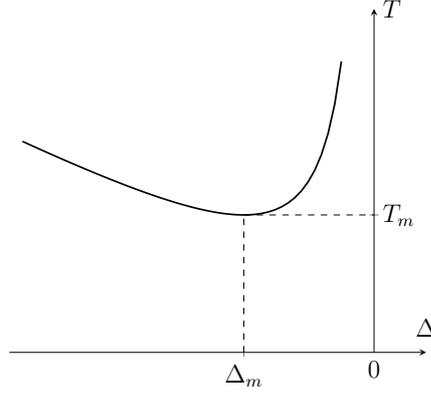


Рис. 1: График минимально достижимой температуры T иона в процессе доплеровского охлаждения в зависимости от величины отстройки Δ от центральной частоты перехода, на котором производится охлаждение.

Варьированием по величине отстройки $\Delta = \omega - \omega_0$ находится минимально достижимая температура

$$T_m = \frac{\hbar\Gamma\sqrt{1+s}}{2k_b}. \quad (40)$$

Соответствующая величина отстройки равна

$$\Delta_m = -\Gamma\frac{\sqrt{1+s}}{2}. \quad (41)$$

После цикла доплеровского охлаждения достигается режим Лэмба-Дике, и можно переходить к охлаждению на боковых частотах. Частоты Раби осцилляций между различными колебательными уровнями могут сильно отличаться. Целью следующей секции является установление зависимости величины частоты осцилляций Раби в зависимости от номеров колебательных уровней.

1.3 Вывод формулы для частот Раби

Как уже отмечалось, энергетические уровни иона, находящегося в потенциале ловушки, испытывают дополнительное расщепление по колебательным подуровням. В первой секции данной главы установлено, что излучение, отстроенное на величину секулярной частоты может вызывать переходы между колебательными подуровнями. Помимо переходов с изменением колебательного числа на $\Delta n = 1$ возможны переходы с большими Δn . Их вероятности скалируются как степени коэффициента Лэмба-Дике $\eta^{\Delta n}$.

Процесс охлаждения на боковых частотах заключается в том, чтобы возбуждать переходы с потерей колебательного кванта, а затем переводить систему в начальное

электронное состояние. Иначе говоря, требуется π -импульсом перевести систему из состояния $|g\rangle|n\rangle$ в состояние $|e\rangle|m\rangle$, где $m < n$. Здесь $|g\rangle$ и $|e\rangle$ - соответственно отражают основное и возбужденное состояния электронной подсистемы, а $|m\rangle$ и $|n\rangle$ - колебательные состояния. В таком случае необходимо знать время π -импульсов, а как следствие частоту осцилляций Раби, между интересующими нас уровнями.

Для нахождения частоты осцилляций между колебательными уровнями отстоящими более чем на единицу, требуется разложение гамильтониана (27) до более старших порядков. В результате получаются выражения, содержащие произведения операторов σ_{\pm} , \hat{a} и \hat{a}^{\dagger} . Рассмотрим слагаемое, содержащее l операторов \hat{a} и m операторов \hat{a}^{\dagger} . Тогда при отстройке лазера на величину $\delta = s\omega_{sec} = (l - m)\omega_{sec}$, данные слагаемые будут связывать состояния $|g\rangle|n\rangle$ и $|e\rangle|n + s\rangle$. Частота осцилляций определяется матричным элементом $\langle n + s | e^{i\eta(\hat{a} + \hat{a}^{\dagger})} | n \rangle$ [8]:

$$\Omega_{n,n+s} = \Omega_0 \langle n + s | e^{i\eta(a + a^{\dagger})} | n \rangle. \quad (42)$$

Здесь Ω_0 - коэффициент пропорциональности, суть которого будет установлена позже. Выражение (42) упрощается, если воспользоваться формулой Кэмпбелла-Бейкера-Хаусдорфа [9]:

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-1/2[A,B]}, \quad (43)$$

которое справедливо для операторов, удовлетворяющих

$$[A[A, B]] = [B, [A, B]] = 0. \quad (44)$$

В результате получается

$$\exp(i\eta(a + a^{\dagger})) = \exp(-1/2\eta^2) \exp(i\eta a) \exp(i\eta a^{\dagger}). \quad (45)$$

Воспользовавшись свойством лестничных операторов

$$a^s |n + s\rangle = \sqrt{\frac{(n + s)!}{n!}} |n\rangle, \quad (46)$$

можно переписать действие операторной экспоненты

$$\exp(i\eta a) |n + s\rangle = \sum_0^{\infty} \frac{(i\eta)^s}{s!} \sqrt{\frac{(n + s)!}{n!}} |n\rangle. \quad (47)$$

Действие понижающего оператора на основное состояние не изменяет его $a|0\rangle = |0\rangle$.

Если учесть этот факт и ортогональность состояний, матричный элемент запишется как

$$\langle n + s | e^{i\eta(a + a^{\dagger})} | n \rangle = \exp(-\eta^2/2) \eta^{|s|} \sqrt{\frac{n_{>}!}{n_{<}!}} L_{n_{<}}^{|s|}(\eta^2) \quad (48)$$

Здесь введено обозначение $n_<$ для меньшего колебательного уровня и $n_>$ для большего, а также использован общий вид полиномов Лагерра

$$L_n^\alpha(X) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n+\alpha}{n-m} \frac{X^m}{m!}. \quad (49)$$

Тогда финальная формула частот Раби для различных колебательных уровней принимает вид:

$$\Omega_{n,n'} = \Omega_0 e^{-\eta^2/2} \eta^{|s|} \sqrt{\frac{n_>!}{n_<!}} L_{n_<}^{|s|}(\eta^2). \quad (50)$$

Из формулы легко установить физический смысл величины Ω_0 - это частота осцилляций Раби атомного перехода без учета колебательной структуры. С помощью данной формулы будут вычисляться времена лазерных импульсов в охлаждающей последовательности.

После цикла охлаждения до основного колебательного состояния требуется установить значение достигнутого среднего колебательного числа. В следующей секции предложен метод для измерения данной величины.

1.4 Методы измерения малых средних колебательных чисел

Основным методом экспериментального измерения значения среднего колебательного числа \bar{n} является отношение амплитуд красной и синей боковых частот в спектре возбуждения иона в ловушке [10]

$$\frac{I_k^{rsb}}{I_k^{bsb}} = \left(\frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right)^k. \quad (51)$$

Здесь k - номер боковой частоты, I_k^{rsb} и I_k^{bsb} - интенсивности левого и правого пиков соответственно. В этой формуле предполагается, что распределение населенностей по колебательным уровням является термальным. При этом в работе [11] продемонстрировано, что населенности только первых 3-4 колебательных уровней хорошо описываются экспоненциальной зависимостью. В связи с этим предлагается получить формулу, которая позволит находить значение среднего колебательного числа для случая произвольного распределения. Рассмотрим процесс возбуждения осцилляций Раби на центральной частоте. Интенсивность излучения иона задается как

$$I_c(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cdot \sin^2 \Omega_{n,n} t = 1/2 - 1/2 \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cos 2\Omega_{n,n} t. \quad (52)$$

Согласно (50) частоту $\Omega_{n,n}$ можно разложить по малому параметру η^2

$$\Omega_{n,n} \approx \Omega_0 e^{-\eta^2/2} (1 - n\eta^2). \quad (53)$$

При подстановке (53) в выражение для интенсивности (52) получается

$$I_c(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cos(2\Omega_0 e^{-\eta^2/2} t) \cos(2\Omega_0 e^{-\eta^2/2} \eta^2 n t) - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} P_n \sin(2\Omega_0 e^{-\eta^2/2} t) \sin(2\Omega_0 e^{-\eta^2/2} \eta^2 n t) \quad (54)$$

В моменты времени, удовлетворяющие

$$2\Omega_0 e^{-\eta^2/2} t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad (55)$$

выражение (54) заметно упрощается, поскольку первая сумма равна нулю. В дальнейшем будет показано, что населенность уровней $n > 10$ пренебрежимо мала. В связи с этим можно произвести разложение множителя $\sin(2\Omega_0 e^{-\eta^2/2} \eta^2 n t)$ в ряд до первого порядка. В результате получается

$$I_c(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} P_n \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) \eta^2 n. \quad (56)$$

В таком случае

$$\bar{n} = \frac{1 - 2I_c(t)}{(\pi/2 + 2\pi k)\eta^2}, \quad (57)$$

где t удовлетворяет условию $2\Omega_0 e^{-\eta^2/2} t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$. В дальнейшем сравним ее с традиционным методом измерения по отношению амплитуд боковых частот. Из формулы (52) также следует, что при малых средних колебательных чилах \bar{n} населенность основного состояния вычислить как

$$P_0 = \frac{I_1^{bsb} - I_1^{rsb}}{I_1^{bsb}} \quad (58)$$

Таким образом проверка совпадения теоретической модели с экспериментом может производиться по двум параметрам: значение среднего колебательного числа \bar{n} и населенность основного состояния P_0 .

Глава 2

Численный расчет охлаждения иона $^{171}\text{Yb}^+$

2.1 Схема охлаждения иона $^{171}\text{Yb}^+$ до основного колебательного состояния

Процесс охлаждения иона до основного колебательного состояния состоит из двух этапов. На первом этапе ион доплеровски охлаждается в течении 20 мс. В результате чего, среднее колебательное число достигает значения $\bar{n} = 55$. На втором этапе происходит субдоплеровское охлаждение. Субдоплеровское охлаждение состоит из последовательных операций возбуждения квадрупольного перехода с потерей колебательного кванта и подготовки системы в начальное электронное состояние.

Лазерный π -импульс на длине волны 435 нм, отстроенный на ω_{sec} от резонансной частоты атомного перехода, переносит населенность уровня $^2S_{1/2}(F = 0)$ на уровень $^2D_{3/2}(F = 2)$. Одновременно с этим, изменяется и колебательное состояние. Населенности старших колебательных уровней перетекают на соседние младшие уровни. Затем при подготовке начального электронного состояния в непрерывном режиме на 4 мкс включаются "перекачивающие" лазеры на длинах волн 935 нм и 369 нм. За это время распределение населенностей по колебательным уровням в основном не меняется. Однако, возможны нерезонансные возбуждения с поглощением или потерей колебательного кванта. Такие процессы в среднем приводят к нагреву иона и ограничивают максимальную глубину охлаждения.

Определение величины паразитных нагревов требует построения и подробного рассмотрения дополнительных моделей, поэтому для начала рассматривается процесс охлаждения без учета нагревов, оптимизируется последовательность охлаждающих импульсов.

2.2 Построение модели охлаждения

С теоретической точки зрения колебательных уровней бесконечно много. Модель может учитывать только конечное их количество.

После доплеровского охлаждения состояние системы определяется термальным

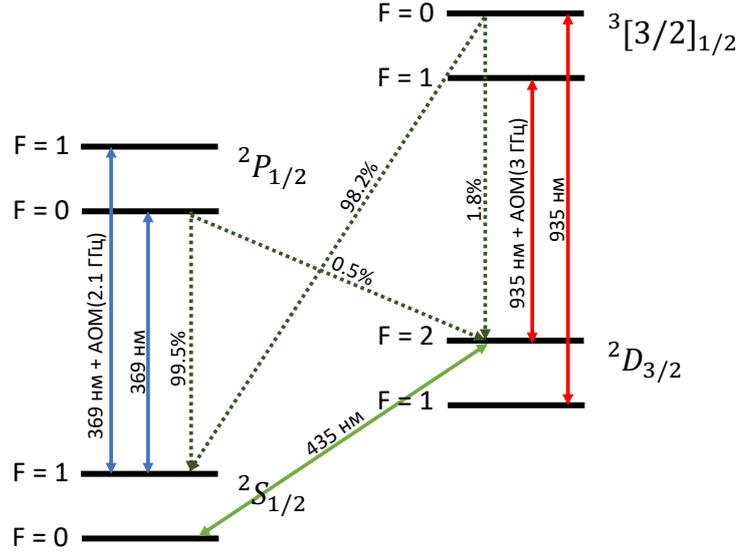


Рис. 2: Схема энергетических уровней иона $^{171}\text{Yb}^+$ и переходов, используемых в эксперименте. Зеленой линией обозначен квадрупольный переход на длине волны 435 нм. Данный переход возбуждается излучением, с отстройкой на ω_{sec} от резонанса атомной линии. В результате чего, колебательное состояние будет меняться. Лазерное излучение на длине волны 935 нм дополнительно модулируется на частоте 3 ГГц. Соответствующие переходы, обозначенные красными линиями, используются в процессе подготовки начального состояния. Лазерное излучение на длине волны 369 нм модулируется на частоте 2.1 ГГц. Возбуждаемые атомные переходы обозначены синим цветом и используются в процессе доплеровского охлаждения, а также в процессе подготовки начального состояния. Каналы спонтанных распадов обозначены пунктирными линиями. Электрон с уровня $^2P_{1/2}$ с вероятностью 99.5% распадется на уровень $^2S_{1/2}$ и с вероятностью 0.05% на уровень $^2D_{3/2}$. Для уровня $^3[3/2]_{1/2}$ вероятность распада электрона на уровень $^2S_{1/2}$ составляет 98.2%, а на уровень $^2D_{3/2}$ 1.8%

распределением [12]. Оно рассчитывается согласно формуле

$$P_n = \frac{\bar{n}^n}{(\bar{n} + 1)^{n+1}} \quad (59)$$

Распределение населенностей для $\bar{n} = 55$ представлено на Рис. 3 в обычном и логарифмическом масштабах. Практически вся населенность содержится на первых 400-та колебательных уровнях $\sum_{n=0}^{n=400} P_n > 0.9999$. Поэтому в модели будут учитываться только они. В таком случае, ошибка, связанная с конечностью числа рассматриваемых уровней заведомо меньше 10^{-4} .

Формулу для частот осцилляций Раби (50) между колебательными уровнями n

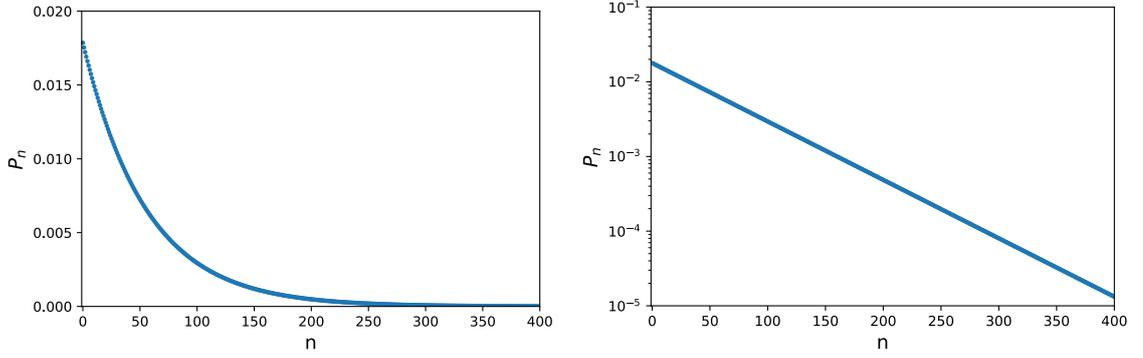


Рис. 3: Термальное распределение населенности колебательных уровней для $\bar{n} = 55$

и $n + \Delta n$, полученную в главе 1, удобно записать как

$$\Omega_{n,\Delta n} = \Omega_0 e^{-\eta^2/2} \eta^{|\Delta n|} \sqrt{\frac{n!}{(n + \Delta n)!}} L_n^{|\Delta n|}(\eta^2). \quad (60)$$

На Рис. 4 представлена зависимость этих частот, отнесенных к Ω_0 , для 400 первых колебательных уровней, для переходов с изменением колебательного уровня на $\Delta n = 0, 1$ или 2 .

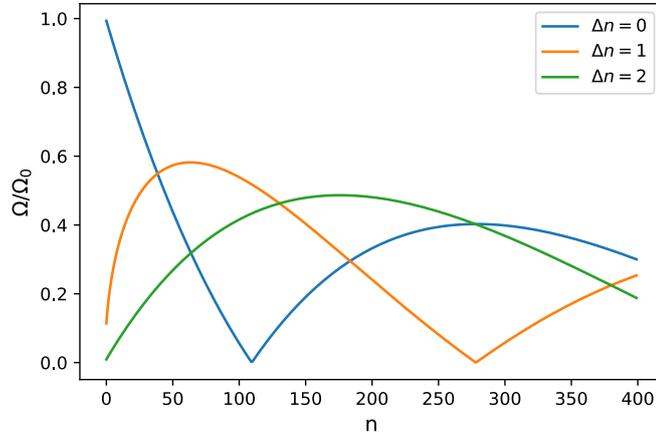


Рис. 4: Относительные частоты Раби для $\Delta n = 0$ (синим цветом), $\Delta n = 1$ (желтым цветом), $\Delta n = 2$ (зеленым цветом)

Видно, что для некоторых значений колебательных уровней n значение частоты обнуляется. К примеру, для переходов с $\Delta n = 1$ частота Раби обращается в 0 при $n = 270$. Значит, при их возбуждении, населенность уровней $n = [270, 400]$ не сможет попасть на уровни ниже чем $n = 270$. Следовательно, результативность охлаждения снизится. Для переходов с $\Delta n = 1$ (возбуждается π -импульсом 1-й боковой частоты) и $\Delta n = 2$ (возбуждается π -импульсом 2-й боковой частоты) уровни n , для которых

частоты Раби обращаются в ноль различны. Следовательно, их можно использовать попеременно для избежания описанного эффекта.

После приложения к иону π -импульса на первой боковой частоте, колебательное состояние $|n\rangle$ перейдет в $|n-1\rangle$ с вероятностью $P_{n \rightarrow n-1}$, а колебательное состояние $|n+1\rangle$ перейдет в $|n\rangle$ с вероятностью $P_{n+1 \rightarrow n}$. В результате, новая населенность уровня определяется формулой

$$P_n \rightarrow P_n - P_n P_{n \rightarrow n-1} + P_{n+1} P_{n+1 \rightarrow n}, \quad (61)$$

где $P_{n \rightarrow n-1}$ – вероятность перехода. Как функция времени π -импульса, она задается выражением [11]

$$P_{n \rightarrow n-1} = \sin^2 \left(\frac{\Omega_{n,n-1} t}{2} \right). \quad (62)$$

Аналогичные размышления можно произвести для случая приложения π -импульса на второй боковой частоте. На Рис. 4 представлено распределение населенностей по колебательным подуровням после 50 π -импульсов излучения, настроенного на первую боковую частоту, а на Рис.5 аналогичное для излучения, настроенного на вторую боковую частоту. Здесь отчетливо видно возникновение локальных максимумов населенности.

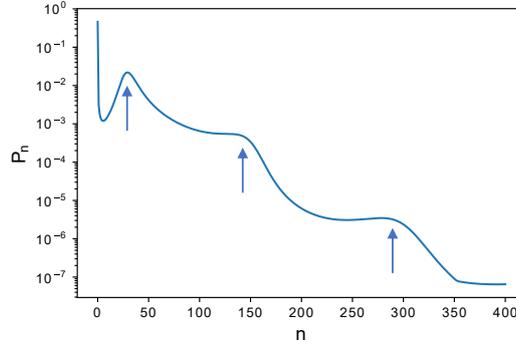


Рис. 5: Распределение населенностей после 50 импульсов на первой боковой частоте. На уровнях $n = 30, 150, 300$ возникают локальные максимумы.

Следовательно, при поиске оптимальной последовательности охлаждающих лазерных импульсов, помимо такого параметра как время π -импульса, требуется установить наилучший момент переключения между различными боковыми частотами.

2.3 Поиск оптимальной последовательности импульсов

При проведении двухкубитных операций стараются достичь значения $\bar{n} < 0.1$ [13]. Окончание последовательности подбирается по такому же принципу. Поиск опти-

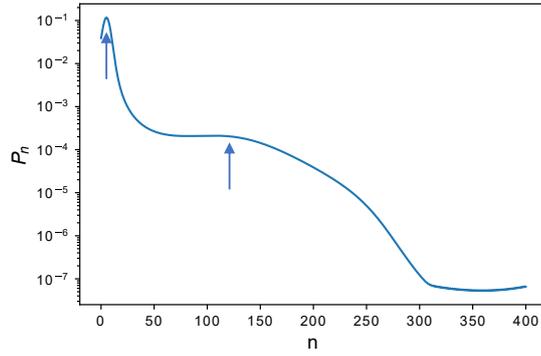


Рис. 6: Распределение населенностей после 50 импульсов на второй боковой частоте. На уровнях $n = 4, 120$ возникают локальные максимумы.

мальной последовательности состоит из трех этапов:

1. Определение оптимальных времен π -импульсов для переходов с $\Delta n = 1$ и $\Delta n = 2$.
2. Определение момента переключения между импульсами на первой и второй боковых частотах.
3. Определение полного количества импульсов в последовательности. Далее говорится подробно про каждый этап.

Согласно (60), частоты Раби меняются в зависимости от номера колебательного уровня. По этой причине, реальное время лазерного импульса будет являться π -импульсом только для переходов между некоторыми из рассматриваемых колебательных уровней. В связи с этим различают два метода определения длины лазерного импульса. В первом случае, время каждого следующего импульса вычисляется как время π -импульса для колебательного уровня, номер которого ближе всего совпадает с настоящим значением среднего колебательного числа. То есть, для каждого импульса время отличается. Во втором случае, время π -импульса выбирается постоянным для некоторого количества импульсов. В работах [11, 14] продемонстрирована фактическая эквивалентность данных схем. При построении модели охлаждения будет использоваться второй способ.

Из Рис. 3. видно, что все возможные времена импульсов отвечают области уровней $n = [60, 280]$ для переходов с $\Delta n = 1$ и $n = [0, 160]$ для переходов с $\Delta n = 2$. Оптимальное время лазерного импульса определяется из зависимости максимальной глубины охлаждения, от времени импульса, как функции номера колебательного уровня n . Данная зависимость представлена на Рис. 6.

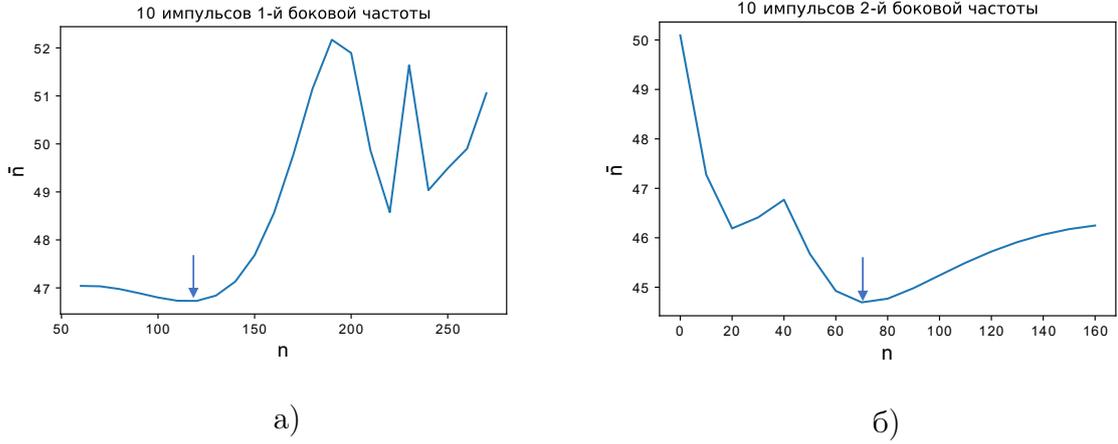


Рис. 7: Зависимость глубины охлаждения \bar{n} от длины лазерного импульса. По горизонтальной оси отложен номер уровня, время импульса для которого определяется величиной $\tau(n) = \pi/\Omega[n, 1]$ или $\tau(n) = \pi/\Omega[n, 2]$ для импульсов на 1-й и 2-й боковых частотах соответственно. Каждая точка представляет собой глубину охлаждения при приложении к системе в начальном состоянии ($\bar{n} = 55$, термальное распределение населенностей) 10-ти импульсов: а) на первой боковой частоте б) на второй боковой частоте.

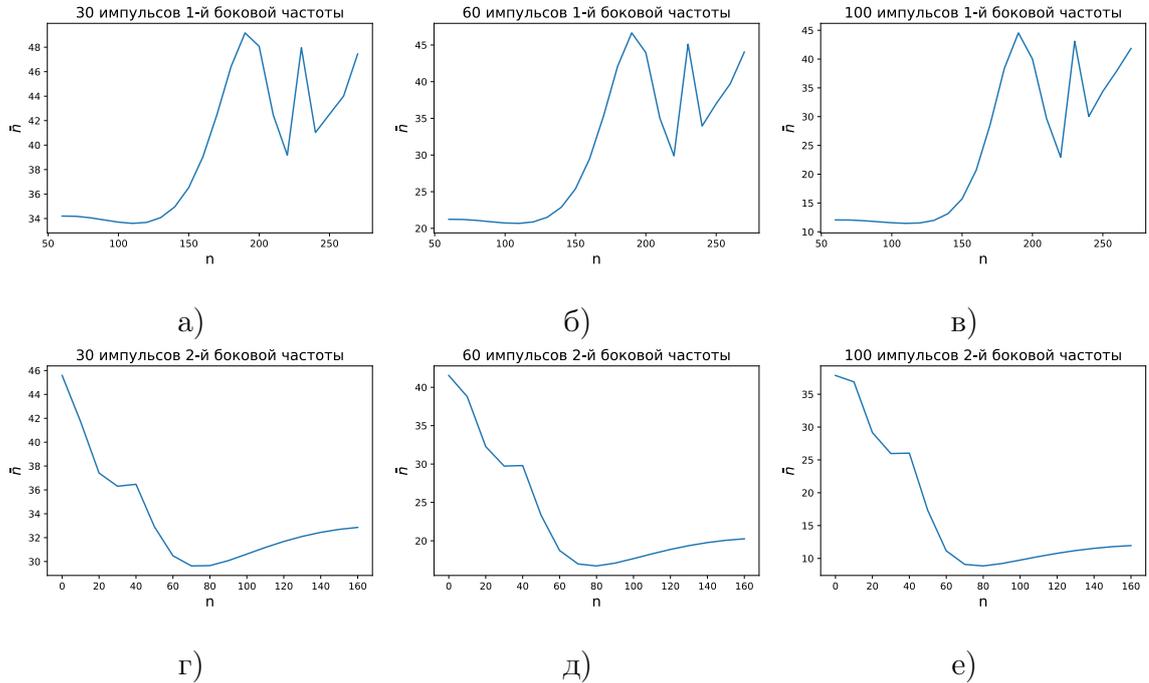


Рис. 8: Зависимость глубины охлаждения \bar{n} от длины лазерного импульса как функции номера уровня n . Число импульсов 1-й боковой частоты: а) 30, б) 60, в) 100; число импульсов 2-й боковой частоты: г) 30, д) 60, е) 100. Видно, что минимум не смещается, при различном количестве импульсов.

Время π -импульса можно вычислять как $\tau = \pi/\Omega[n, 1]$ или $\tau = \pi/\Omega[n, 2]$, где

n соответствует значению на Рис. 7, при котором достигается минимальное значение \bar{n} . Зависимости строятся для случая приложения 10-ти импульсов. Однако дальнейшее исследование (Рис. 8) показывает, что оптимальное время слабо зависит от количества импульсов, если их число меньше 100. На следующем этапе определяется очередность импульсов 1-й и 2-й боковых частот, а также количество импульсов, в течение которых охлаждение эффективно работает. Для этого исследуется график среднего колебательного числа от количества импульсов. Зависимость отражена на Рис. 9.

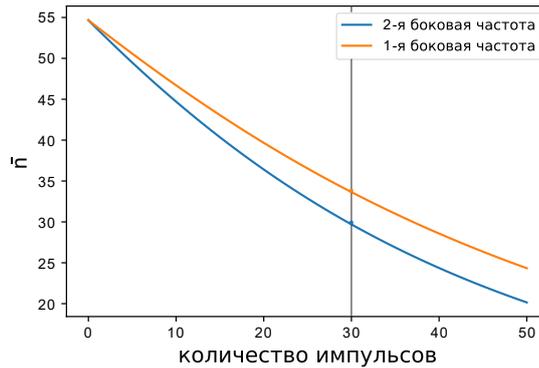


Рис. 9: Зависимость \bar{n} от количества импульсов. В начальный момент ион считается доплеровски охлажденным до $\bar{n} = 55$, а распределение населенностей по колебательным уровням термальным. Каждая точка отражает значение \bar{n} после приложения очередного π -импульса на 1-й боковой частоте(красным) или на 2-й боковой частоте(синим).

Видно, что эффективность охлаждения импульсами второй боковой частоты выше, чем первой. Однако, как было сказано выше, их необходимо чередовать, чтобы избежать накопления населенности на промежуточных уровнях. Обе кривые являются квазилинейными функциями в пределах $n = 30$. Далее эффективность охлаждения начинает снижаться, поскольку возникает накопление населенности на некоторых колебательных уровнях (Рис. 5,6). Значит в оптимальной последовательности количество импульсов одной частоты не должно быть заметно больше 30.

На последнем этапе определяется момент, оптимальный для переключения с одной боковой частоты на другую. Для этого исследуется график зависимости глубины охлаждения от соотношения числа импульсов 1-й и 2-й боковых частот (Рис. 10).

Как видно из зависимости, существует некоторый оптимум в соотношении количества импульсов 1-й и 2-й боковых частот. Лазерные импульсы с $\Delta n = 2$ не могут переносить населенность с уровня $n = 1$ ниже на уровень $n = 0$. По этой причине, с уменьшением среднего колебательного числа эффективность охлаждения импульсами 2-й боковой частоты снижается, поэтому их количество в последовательности умень-

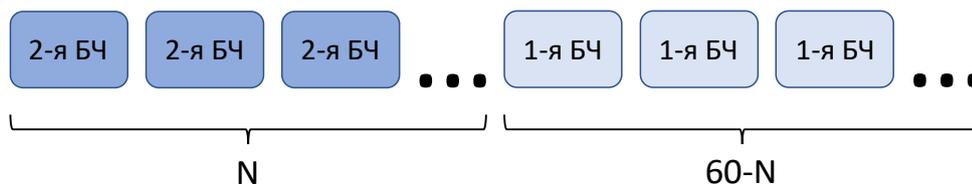


Рис. 10: исследуемая последовательность

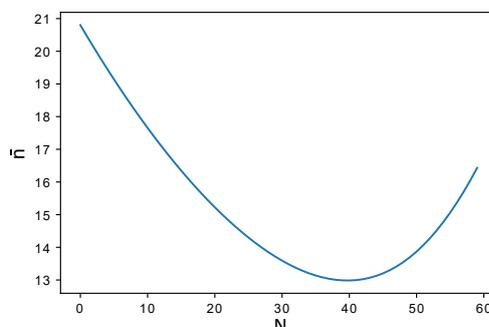


Рис. 11: Зависимость \bar{n} от соотношения числа импульсов 1-й и 2-й боковых частот. Было установлено, число импульсов одной частоты, идущих подряд ≈ 30 , поэтому рассматривается случай, где суммарно импульсов первой и второй боковых частот 60.

шается.

Одна группа из 60 импульсов не позволяет достичь требуемой глубины охлаждения $\bar{n} < 0.1$. Как показывает исследование, для этого потребуется 4 группы, каждая из которых оптимизированна вышеописанным способом:

- 40 импульсов, 2-я боковая частота, $\tau_\pi = 17.6$ мкс
- 20 импульсов, 1-я боковая частота, $\tau_\pi = 12.2$ мкс
- 39 импульсов, 2-я боковая частота, $\tau_\pi = 16.2$ мкс
- 21 импульсов, 1-я боковая частота, $\tau_\pi = 11.6$ мкс
- 37 импульсов, 2-я боковая частота, $\tau_\pi = 16.2$ мкс
- 23 импульсов, 1-я боковая частота, $\tau_\pi = 11.6$ мкс
- 35 импульсов, 2-я боковая частота, $\tau_\pi = 17.6$ мкс
- 25 импульсов, 1-я боковая частота, $\tau_\pi = 12.2$ мкс

Таким образом, оптимальная последовательность состоит из 240 импульсов. На Рис. 11 и Рис. 12 приведены итоговое распределение населенностей по колебательным уровням и зависимость \bar{n} от номера импульса после субдоплеровского охлаждения.

Конечное значение среднего колебательного числа составило $\bar{n} = 0.0968$, а насе-

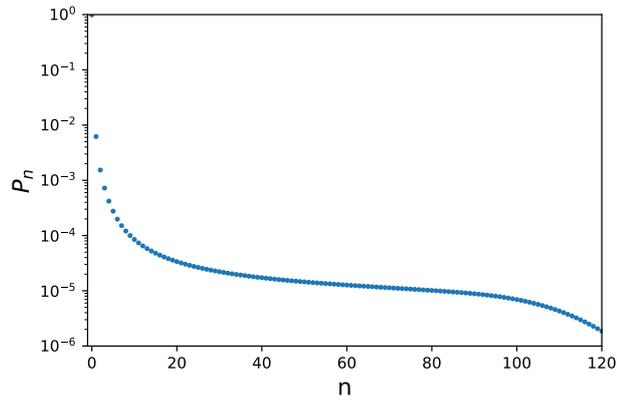


Рис. 12: Финальное распределение населенностей для оптимальной последовательности. Ион охлаждается от \bar{n} оптимизированной последовательностью лазерных импульсов. Населенность основного колебательного состояния составила 98.77%.

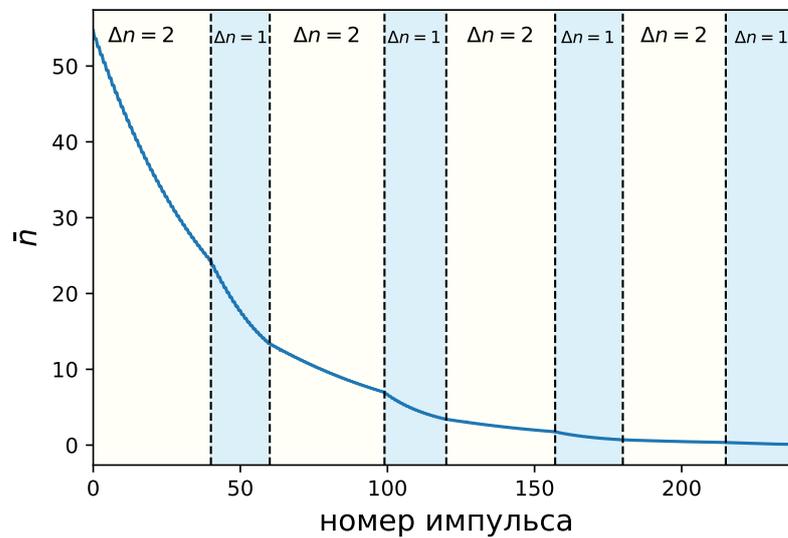


Рис. 13: Зависимость среднего колебательного числа \bar{n} от номера импульса для оптимальной последовательности. Конечное значение среднего колебательного числа $\bar{n} = 0.0968$. Бледно розовым цветом обозначены участки последовательности, отвечающие импульсам 2-й боковой частоты, а голубым цветом - участки импульсов 1-й боковой частоты.

ленность основного колебательного состояния - 98.77%. Общее время последовательности равно 3.6 мс.

В описанной выше модели не учитываются процессы перекачки населенности с возбужденного электронного уровня $^2D_{3/2}(F = 2)$ на начальный уровень $^2S_{1/2}(F = 0)$, необходимые после каждого π -импульса. В следующем параграфе определена величина паразитных нагревов, возникающих в этих процессах.

2.4 Моделирование процессов перекачки

Вероятность нерезонансного возбуждения, как и спонтанного распада для переходов с изменением колебательного уровня на Δn скалируется как $\eta^{2\Delta n}$, что напрямую следует из формулы (47). Поскольку параметр Лэмба-Дике η мал, в модели учитываются только переходы с $\Delta n = 1$ (Рис. 13). Таким же образом скалируется вероятность того, что произойдет более одного перехода с изменением колебательного состояния за цикл перекачки. Спонтанный распад с уровня ${}^2P_{1/2}$ на уровень ${}^2D_{3/2}$ происходит только в 0.5% случаев, а значит ион попадает в начальное состояние, в среднем, за один цикл.

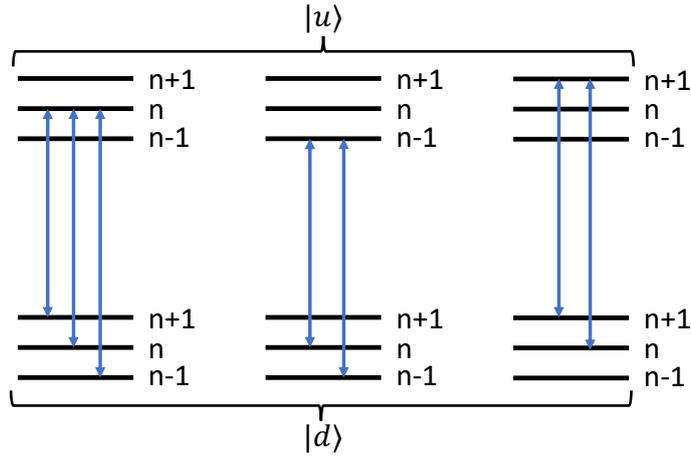


Рис. 14: Рассматриваемые в модели перекачки переходы между нижним $|d\rangle$ и верхним $|u\rangle$ электронными уровнями с колебательными подуровнями $|n\rangle$, $|n-1\rangle$ и $|n+1\rangle$ соответственно. Вероятность переходов с $\Delta n > 1$ пренебрежимо мала.

В таком случае можно ограничиться рассмотрением системы, состоящей из 24-х уровней, где каждый из 8-ми электронных уровней (Рис. 2) представляется тремя колебательными подуровнями. Нагревы определяются населенностями колебательных уровней $|n-1\rangle$ и $|n+1\rangle$ в конце перекачки, поскольку они демонстрируют вероятность нагрева или охлаждения системы соответственно. Для их вычисления рассматривается уравнение Линдблада:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}(t), \hat{\rho}] + \frac{1}{2} \sum_n [\hat{\Lambda}_n \hat{\rho}, \hat{\Lambda}_n^\dagger] + [\hat{\Lambda}_n, \hat{\rho} \hat{\Lambda}_n^\dagger], \quad (63)$$

где $\hat{\rho}$ - матрица плотности системы, $\hat{H}(t)$ - полный гамильтониан, а

$$\hat{\Lambda}_n = \sqrt{\Gamma_n} |f_n\rangle \langle i_n| \quad (64)$$

представляет собой супероператор Линдблада, описывающий спонтанный распад из состояния $|f_n\rangle$ в состояние $|i_n\rangle$ с постоянной времени Γ_n . Постоянная распада для раз-

личных компонент сверхтонкого расщепления находятся с использованием $6j$ -символов [15]:

$$\Gamma_{FF'} = (2F' + 1)(2J + 1) \left\{ \begin{array}{ccc} J & F & 1/2 \\ F' & J' & 1 \end{array} \right\}^2 \Gamma_{JJ'}, \quad (100)$$

где J - полный момент электронной оболочки иона, $F = J + 1/2$ - сумма моментов электронной оболочки и ядра, $\Gamma_{JJ'}$ - естественная ширина спектральной линии перехода между состояниями с заданными J и J' . Штрихованные индексы соответствуют нижнему уровню.

Вероятности распадов между колебательными уровнями скалируются как соответствующие частоты Раби (42). Тогда постоянная распада, к примеру, в случае перехода без изменения колебательного состояния

$$\Gamma = \frac{\Omega_{n,n}}{\Omega_{n,n-1} + \Omega_{n,n} + \Omega_{n,n+1}} \Gamma_{FF'} \quad (65)$$

Полный гамильтониан системы включает внутренние уровни энергии системы и взаимодействие с внешним лазерным полем. Гамильтониан взаимодействия состоит из операторов вида

$$\hat{H}_{int} = \frac{\hbar\Omega_R}{2} (|m\rangle\langle n|e^{i\omega_L t} + |n\rangle\langle m|e^{-i\omega_L t}), \quad (66)$$

где ω_L - частота падающего излучения. Частота раби возбуждаемых осцилляций определяется через ширину перехода и параметр насыщения

$$\Omega_R = \Gamma\sqrt{s} \quad (67)$$

$$s = \frac{I}{I_{sat}}, \quad I_{sat} = \frac{4\pi^2\hbar c\Gamma}{3\lambda^3}. \quad (68)$$

Здесь λ - длина волны соответствующего перехода.

Численное моделирование уравнения Лиувилля в явном виде требует больших вычислительных мощностей, поскольку содержит быстро осциллирующие экспоненциальные множители. Чтобы упростить вычисления, уравнения часто записывают во вращающейся системе отсчета [16].

2.5 Преобразование к вращающейся системе отсчета

Рассмотрим пререход во вращающуюся систему отсчета для случая 3-х уровней. Далее по аналогии найдем преобразование для полной системы. Запишем уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{d|\psi_0\rangle}{dt} = (H_0 + H_1)|\psi_0\rangle. \quad (69)$$

Здесь H_0 – Гамильтониан невозмущенного иона

$$H_0 = \begin{pmatrix} \hbar\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & \hbar\omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & \hbar\omega_2 \end{pmatrix} \quad (70)$$

где $\hbar\omega_{0,1,2}$ - энергии атомных уровней. H_1 – Гамильтониан взаимодействия с оптическим полем

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_1 e^{i\omega_{L_1} t} & \Omega_2 e^{i\omega_{L_2} t} \\ \Omega_1 e^{-i\omega_{L_1} t} & 0 & 0 \\ \Omega_2 e^{-i\omega_{L_2} t} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (71)$$

здесь ω_{L_1, L_2} - частоты лазерного излучения, а $\Omega_{1,2}$ - частоты Раби осцилляций для индуцированных переходов.

Производится замену

$$|\psi_0\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}At\right)|\psi_1\rangle. \quad (72)$$

Здесь $A = \text{Diag}\{a_1, a_2, a_3\}$ - некоторая диагональная матрица Принимается $\hbar = 1$. Тогда получается условие

$$e^{-iAt}|\dot{\psi}_1\rangle - iAe^{-iAt}|\psi_1\rangle = -i(H_0 + H_1)e^{-iAt}|\psi_1\rangle, \quad (73)$$

$$|\dot{\psi}_1\rangle - iA|\psi_1\rangle = -ie^{iAt}(H_0 + H_1)e^{-iAt}|\psi_1\rangle. \quad (74)$$

Далее нужно воспользоваться свойством матричной экспоненты

$$e^{iAt} = \sum_0^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \begin{pmatrix} \sum_0^{\infty} \frac{(ia_1t)^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_0^{\infty} \frac{(ia_2t)^n}{n!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_0^{\infty} \frac{(ia_3t)^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ia_1t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{ia_2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{ia_3t} \end{pmatrix}, \quad (75)$$

$$e^{iAt}(H_0 + H_1)e^{-iAt} = \begin{pmatrix} \omega_0 & \Omega_1 e^{i(\omega_{L_1} + a_1 - a_2)t} & \Omega_2 e^{i(\omega_{L_2} + a_1 - a_3)t} \\ \Omega_1 e^{-i(\omega_{L_1} + a_1 - a_2)t} & \omega_1 & 0 \\ \Omega_2 e^{-i(\omega_{L_2} + a_1 - a_3)t} & 0 & \omega_2 \end{pmatrix}. \quad (76)$$

Далее опускается индекс у волновой функции. Наконец, получается финальная система уравнений

$$|\dot{\psi}\rangle = -i \begin{pmatrix} \omega_0 - a_1 & \Omega_1 e^{i(\omega_{L_1} + a_1 - a_2)t} & \Omega_2 e^{i(\omega_{L_2} + a_1 - a_3)t} \\ \Omega_1 e^{-i(\omega_{L_1} + a_1 - a_2)t} & \omega_1 - a_2 & 0 \\ \Omega_2 e^{-i(\omega_{L_2} + a_1 - a_3)t} & 0 & \omega_2 - a_3 \end{pmatrix} |\psi\rangle. \quad (77)$$

Правильным выбором параметров a_1, a_2, a_3 можно избавиться от экспоненциальных множителей:

$$\omega_{L_1} = a_2 - a_1, \quad (78)$$

$$\omega_{L_2} = a_3 - a_1. \quad (79)$$

Энергия основного состояния принимается равной нулю. В таком случае $\hbar\omega_{1,2}$ теперь имеют смысл энергии перехода, а не энергии уровня. После выбора коэффициента $a_1 = 0$ и обозначения отстройки лазерных полей от атомных переходов $\Delta_{1,2} = \omega_{1,2} - \omega_{L_{1,2}}$ получается система

$$|\dot{\psi}\rangle = -i \begin{pmatrix} 0 & \Omega_1 & \Omega_2 \\ \Omega_1 & \Delta_1 & 0 \\ \Omega_2 & 0 & \Delta_2 \end{pmatrix} |\psi\rangle. \quad (80)$$

По аналогии гамильтониан полной системы имеет блочный вид

$$H = \begin{pmatrix} H_{369} & 0 \\ 0 & H_{935} \end{pmatrix} \quad (81)$$

Здесь H_{369} относится к взаимодействию системы с излучением на длине волны 369 нм:

$$H_{369} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_{sec} & 0 & 0 & \Omega_{n-1,n-1}^{369} & \Omega_{n,n-1}^{369} & 0 & \Omega_{n-1,n-1}^{369'} & \Omega_{n,n-1}^{369'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_{n,n-1}^{369} & \Omega_{n,n}^{369} & \Omega_{n,n+1}^{369} & \Omega_{n,n-1}^{369'} & \Omega_{n,n}^{369'} & \Omega_{n,n+1}^{369'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{sec} & 0 & \Omega_{n,n+1}^{369} & \Omega_{n+1,n+1}^{369} & 0 & \Omega_{n,n+1}^{369'} & \Omega_{n+1,n+1}^{369'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_{n-1,n-1}^{369} & \Omega_{n,n-1}^{369} & 0 & \Delta_1 - \omega_{sec} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_{n,n-1}^{369} & \Omega_{n,n}^{369} & \Omega_{n,n+1}^{369} & 0 & \Delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_{n,n+1}^{369} & \Omega_{n+1,n+1}^{369} & 0 & 0 & \Delta_1 + \omega_{sec} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_{n-1,n-1}^{369'} & \Omega_{n,n-1}^{369'} & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta_1 - \omega_{sec} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_{n,n-1}^{369'} & \Omega_{n,n}^{369'} & \Omega_{n,n+1}^{369'} & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_{n,n+1}^{369'} & \Omega_{n+1,n+1}^{369'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta_1 + \omega_{sec} & 0 \end{pmatrix}. \quad (82)$$

Элементы матрицы Ω^{369} обозначают частоты раби переходов, возбуждаемых лазерным излучением на длине волны 369 нм, а $\Omega^{369'}$ - излучением, промодулированным АОМ-ом на частоте 2.1 ГГц. Нижние индексы обозначают колебательные подуровни, между которыми совершается переход. Величина отстройки частоты лазерного излучения от резонанса атомного перехода без изменения колебательного уровня составляет Δ_1 .

В свою очередь H_{935} отвечает за взаимодействие системы с излучением на длине волны 935 нм:

$$H_{935} = \begin{pmatrix} -\omega_{sec} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_{n-1,n-1}^{935} & \Omega_{n,n-1}^{935} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_{n,n-1}^{935} & \Omega_{n,n}^{935} & \Omega_{n,n+1}^{935} \\ 0 & 0 & \omega_{sec} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_{n,n+1}^{935} & \Omega_{n+1,n+1}^{935} \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_{sec} & 0 & 0 & \Omega_{n-1,n-1}^{935'} & \Omega_{n,n-1}^{935'} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_{n,n-1}^{935'} & \Omega_{n,n}^{935'} & \Omega_{n,n+1}^{935'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{sec} & 0 & \Omega_{n,n+1}^{935'} & \Omega_{n+1,n+1}^{935'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_{n-1,n-1}^{935'} & \Omega_{n,n-1}^{935'} & 0 & \Delta_2 - \omega_{sec} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_{n,n-1}^{935'} & \Omega_{n,n}^{935'} & \Omega_{n,n+1}^{935'} & 0 & \Delta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_{n,n+1}^{935'} & \Omega_{n+1,n+1}^{935'} & 0 & 0 & \Delta_2 + \omega_{sec} & 0 & 0 & 0 \\ \Omega_{n-1,n-1}^{935} & \Omega_{n,n-1}^{935} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta_2 - \omega_{sec} & 0 & 0 \\ \Omega_{n,n-1}^{935} & \Omega_{n,n}^{935} & \Omega_{n,n+1}^{935} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta_2 & 0 \\ 0 & \Omega_{n,n+1}^{935} & \Omega_{n+1,n+1}^{935} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta_2 - \omega_{sec} \end{pmatrix} \quad (83)$$

Индексы элементов носят аналогичный характер. Частота модуляции лазерного излучения на длине волны 935 нм составляет 3 ГГц.

Подставляя (81) в (63) и полагая в качестве начальных условий, что электрон находится в состоянии ${}^2D_{3/2}$ с колебательным состоянием $|n\rangle$, можно численно решить уравнение Линдблада. Диагональные элементы матрицы плотности представляют собой населенности соответствующих колебательных уровней. На Рис. 14 представлен результат моделирования для $n = 10$.

2.6 Вычисление величины паразитных нагревов

В начальный момент времени среднее колебательное число

$$\bar{n}_0 = n, \quad (84)$$

поскольку вся населенность сосредоточена в колебательном состоянии $|n\rangle$. В общем случае среднее колебательное число вычисляется как сумма по всем колебательным уровням

$$\bar{n} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k \cdot k. \quad (85)$$

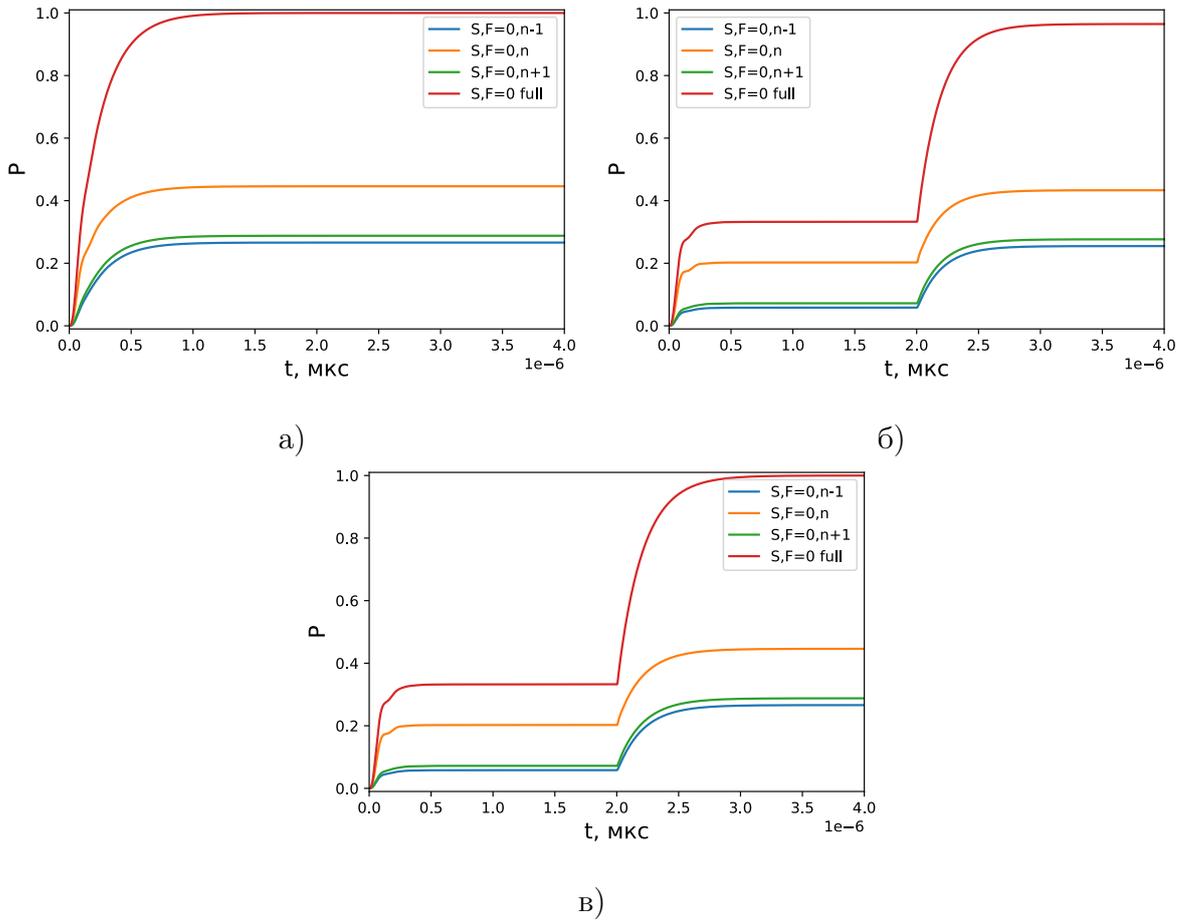


Рис. 15: Зависимость населенностей колебательных подуровней состояния ${}^2S_{1/2}$ от времени для различных схем работы перекачивающих лазеров: а) одновременно работают лазеры с длинами волн 369 и 935 нм; б) лазер на длине волны 935 нм работает 2 мкс, выключается, затем работает лазер на длине волны 369 нм; в) лазер с длиной волны 935 нм работает 2 мкс, затем работают оба лазера. Желтым, зеленым и синим цветом отражены зависимости населенности $|n\rangle$, $|n+1\rangle$ и $|n-1\rangle$ колебательных подуровней соответственно. Красным цветом представлена полная населенность уровня ${}^2S_{1/2}$ от времени. Схема а) является оптимальной, поскольку достигается большая населенность начального состояния.

В процессе перекачки населенность появляется только на рассматриваемых трех колебательных уровнях (Рис. 14). Тогда среднее колебательное число вычисляется как

$$\bar{n}_{fin} = \sum_{k=n-1,n,n+1} P_k \cdot k = P_{n-1} \cdot (n-1) + P_n \cdot n + P_{n+1} \cdot (n+1), \quad (86)$$

где P_{n-1} , P_n , P_{n+1} - суммарная населенность соответствующего колебательного подуровня по всем электронным уровням. В результате изменение среднего колебательного

числа составляет

$$\Delta\bar{n} = \bar{n}_{fin} - \bar{n}_0 = (P_{n-1} + P_n + P_{n+1}) \cdot n - P_{n-1} \cdot 1 + P_{n+1} \cdot 1 - n = (P_{n+1} - P_{n-1}) \cdot 1. \quad (87)$$

Данная величина отражает вероятность поглощения колебательного кванта уровнем $|n + 1\rangle$ с уровня $|n\rangle$ за время подготовки начального состояния.

Произведено моделирование процесса подготовки начального состояния для различных колебательных уровней. Согласно (85) определена величина паразитных нагревов. Зависимость представлена на Рис 15. Вблизи основного колебательного состояния

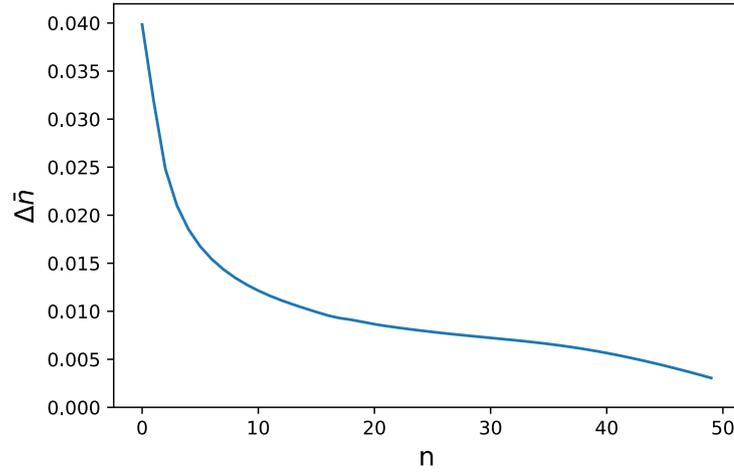


Рис. 16: Зависимость величины нагрева в процессе перекачки от номера колебательного уровня в процессе перекачки. Каждая точка на отражает вероятность переноса колебательного кванта с уровня $|n\rangle$ на уровень $|n + 1\rangle$ в процессе подготовки начального состояния.

нагревы вносят наиболее существенный вклад, а затем их величина быстро спадает с ростом номера колебательного уровня.

Величину паразитных нагревов для уровня $n = 0$ также можно получить аналитически, согласно формуле, предложенной в работе [17]

$$\Delta\bar{n}' = \frac{ts_{re}\Gamma_{re}^3\eta^2}{4\Delta_{HF}^2} = 0.041 \quad (88)$$

где t - время перекачки, s_{re} - параметр насыщения перекачивающего лазера, Γ_{re} - естественная ширина спектральной линии перекачивающего перехода, Δ_{HF} - сверхтонкое расщепление начального состояния. Рассчитанное по формуле (88) значение $\Delta\bar{n}'$ хорошо совпадает с величиной, полученной в описаной выше модели.

2.7 Учет паразитных нагревов

Для учета паразитных нагревов населенности колебательных уровней пересчитываются после приложения каждого охлаждающего π -импульса

$$P_{n+1} \rightarrow P_{n+1} + P_n \cdot \Delta n, P_n \rightarrow P_n \cdot (1 - \Delta n). \quad (89)$$

Здесь Δn помимо нагревов от перекачки содержит и нагревы от ловушки. Экспериментально измеренная величина нагревов от ловушки составляет 10000 фононов/с.

Паразитные нагревы приводят к снижению эффективности охлаждения. Для оптимальной последовательности охлаждающих импульсов из параграфа 2.3 максимальная глубина охлаждения составила $\bar{n} = 0.209$ (вместо $\bar{n} = 0.097$ без учета паразитных нагревов). В свою очередь населенность основного колебательного уровня составила $P_0 = 81.4\%$ (вместо $P_0 = 98.8\%$). Полное время охлаждения с учетом процессов перекачки менее 5 мс.

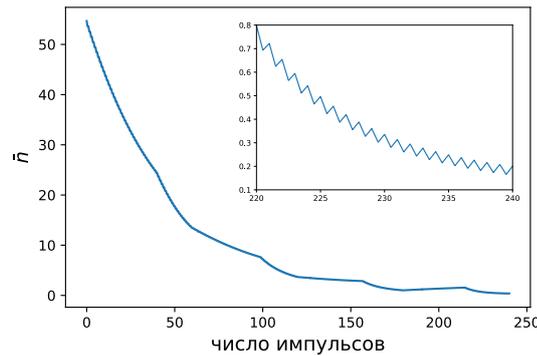


Рис. 17: Зависимость \bar{n} от количества импульсов для оптимальной охлаждающей последовательности с учетом паразитных нагревов.

Глава 3

Эксперимент по охлаждению иона $^{171}\text{Yb}^+$

3.1 Сравнение значений средних колебательных чисел

Произведена серия экспериментов по охлаждению иона до основного колебательного состояния. В каждом из них ион доплеровски охлаждался в течении 20 мс. Было установлено, что для выбранной колебательной моды после доплеровского охлаждения достигается значение $\bar{n} = 55$. Что практически совпадает с доплеровским пределом [18]

$$\bar{n} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\omega}{\Gamma\sqrt{1+s}}\right) - 1} \approx 50 \quad (90)$$

После доплеровского охлаждения следовала последовательность импульсов на боковых частотах (перед каждым π -импульсом производилась подготовка начального состояния $^2S_{1/2}(F=0)$ в течении 4 мкс). После этого детектировалась интенсивность излучения при возбуждении осцилляций Раби на центральной частоте. Исходя из полученных данных, среднее колебательное число находилось при помощи методов из параграфа 1.4. В качестве альтернативного метода, \bar{n} можно извлечь из аппроксимации функции (91) для осцилляций Раби на центральной частоте [18]

$$P(t) = \frac{a}{2} \left[1 - \frac{\text{Re} \left[e^{i\Omega_0 t} \prod_{k=1}^N \left(1 - \frac{\bar{n} e^{i\Omega_0 \eta^2 t}}{\bar{n} + 1} \right) \right]}{\prod_{k=1}^N \left((\bar{n} + 1) - 2\bar{n} \cos(\Omega_0 \eta^2 t) + \frac{\bar{n}^2}{\bar{n} + 1} \right)} \right]. \quad (91)$$

Здесь a - населенность состояния $^2S_{1/2}(F=0)$ в начальный момент времени. Детектируемые осцилляции после процесса доплеровского охлаждения представлены на Рис. 18.

Было обнаружено, что результаты модели хорошо коррелируют с экспериментальными значениями только на начальном этапе охлаждения (~ 120 первых импульсов). Охлаждение прекращалось при достижении некоторого предельного значения $\bar{n} \approx 7$. Предполагается, что это связано с зарядкой электродов ловушки в процессе перекачки. В таком случае ион под воздействием дополнительного электростатического поля смещается относительно нуля квадрупольного потенциала ловушки и получает

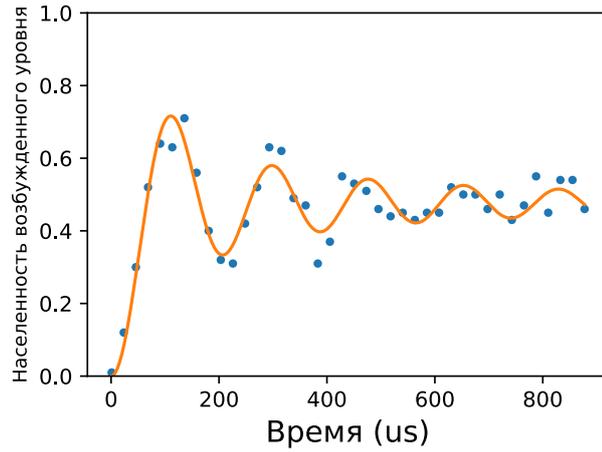


Рис. 18: Осцилляции Раби на центральной частоте после доплеровского охлаждения
дополнительный нагрев. Соответствующие экспериментальные результаты можно ви-
деть на Рис. 19 Значение, полученное по формуле (57) дает $\bar{n} = 6.31$, в то время как
аппроксимация данных функцией (91) демонстрирует значение $\bar{n} = 7.07$.

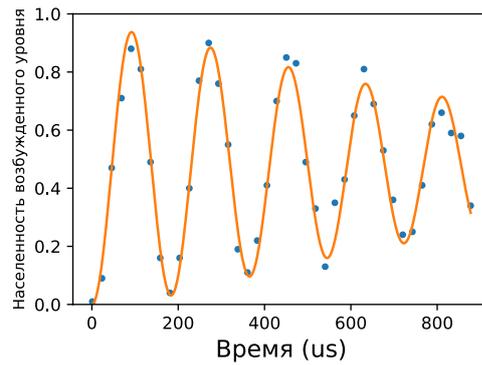


Рис. 19: Осцилляции Раби на центральной частоте после охлаждения до основного
колебательного состояния

Как было сказано выше, экспериментальные данные хорошо совпадают со значе-
ниями теоретической модели для последовательности длиной до 120 импульсов. На Рис.
20 представлены теоретически найденные распределение населенностей и зависимость
среднего колебательного числа от номера импульса. Модельные значения оказались
равны $\bar{n} = 6.75$ и $P_0 = 0.373$.

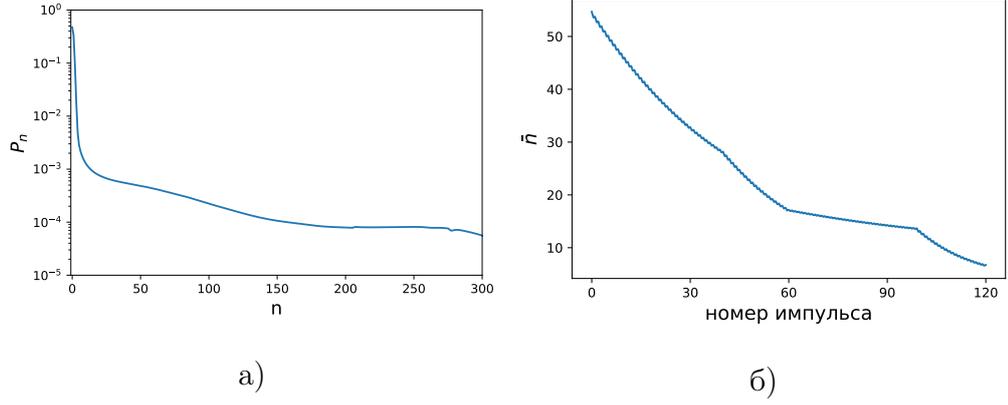


Рис. 20: а) Распределение населенностей, б) Среднее колебательное число от количества импульсов для последовательности из 120 охлаждающих импульсов

3.2 Сравнение населенностей основного колебательного состояния из экспериментальных и теоретических данных

Для вычисления населенности основного состояния согласно (58) была измерена вероятность возбуждения перехода π -импульсом вблизи красной и синей первых боковых частот.

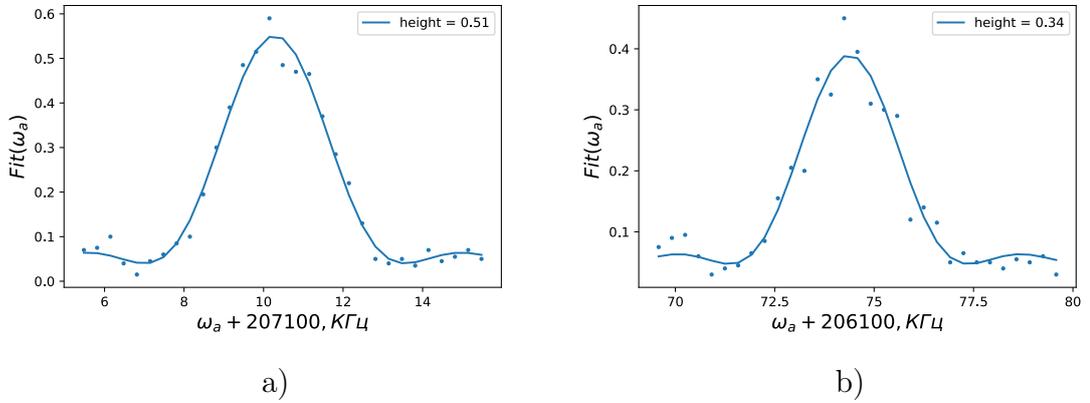


Рис. 21: Вероятность возбуждения перехода вблизи а) синей, б) красной первых боковых частот. По горизонтальной оси отложена частота АОМа.

Амплитуда вероятности для возбужденного состояния [19]

$$c(t) = \left[\cos\left(\frac{\Omega_0 t}{2}\right) - \frac{i\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega_0 t}{2}\right) \right]. \quad (92)$$

В таком случае вероятность возбуждения перехода $P_{ex}(t_\pi) = |c(t_\pi)|^2 \propto \text{sinc}(\Delta)$, где τ_π - время импульса. Поэтому экспериментальные точки аппроксимируются функцией

$$\text{Fit}(\omega_a) = \text{height} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega_a - \text{mean}}{\text{width}}\right)^2 + \text{noise}, \quad (93)$$

где ω_a - частота АОМа, $height$ - максимальное значение функции, $mean$ - координата, при которой достигается максимум, $width$ - параметр ширины, а $noise$ - уровень шума. Экспериментальные точки с аппроксимацией изображены на Рис. 21. В лабораторной установке реализована схема, в которой в ловушку заводится +1й порядок из акустооптического модулятора, т.е. при возбуждении центрального перехода частота аома ненулевая. В связи с этим на графиках значения по горизонтальной оси положительны как для красной так и для синей боковых частот. Рзначения $height$ соответствует параметрам I_1^{bsb} и I_1^{rsb} из (58). Тогда получим $I_1^{bsb} = 0.51$ и $I_1^{rsb} = 0.34$ из аппроксимационных функций для левого и правого графиков соответственно (Рис. 21). Полученное значение $P_0 = 0.333$.

Таким образом значения среднего колебательного числа, найденные двумя способами из экспериментальной зависимости, хорошо совпадают с показаниями теоретической модели. Полученные экспериментально и теоретически величины населенностей совпадают хуже. Это говорит о том, что в области средних колебательных значений $\bar{n} \approx 7$, сделанные при выводе (58) приближения еще не выполняются с достаточной точностью.

Заключение

В данной работе предложен алгоритм оптимизации охлаждения иона, захваченного в ловушку Пауля, до основного колебательного состояния методом боковых частот. Аналитически показана возможность достижения значения $\bar{n} < 0.01$ методом охлаждения на боковых частотах с использованием квадрупольного перехода ${}^2S_{1/2}(F = 0) \rightarrow {}^2D_{3/2}(F = 2)$. Предложен способ отыскания оптимальной охлаждающей последовательности.

Построена модель, описывающая процессы перекачки при подготовке начального состояния. Численный расчет показал, что вклад паразитных нагревов от самой ловушки превосходит нагревы от перекачки.

Приведен новый способ вычисления среднего колебательного числа, не зависящий от распределения населенностей. Найденные из экспериментальных данных значения \bar{n} , полученные разными методами, хорошо совпадают со значением из теоретической модели. Значения населенностей основного состояния в теоретической модели и эксперименте также совпали.

На данный момент экспериментальным пределом охлаждения является $\bar{n} \approx 7$. Предположительно, это связано с тем, что в процессе перекачки ультрафиолетовое излучение попадает на молибденовые электроды ловушки. Происходит фотоотрыв, в результате чего на электродах образуется нескомпенсированный заряд. Ионы смещаются относительно положения равновесия, это подтверждается детектированием сдвига при помощи камеры. Поскольку на ионы, смещенные относительно нуля потенциала ловушки действует возмущающая сила, они начинают нагреваться. В результате чего максимальная глубина охлаждения становится заметно выше.

В дальнейшие планы по развитию установки входит создание новой ловушки, с измененной геометрией, а также возможностью более прецизионной сборки, кроме этого, планируется покрытие электродов золотом, обладающим большей, в сравнении с железом, работой выхода. С теоретической стороны будет разработана модель для расчета нагревов, возникающих вследствие смещения иона относительно центра потенциала ловушки.

В перспективе, при достижении требуемой глубины охлаждения $\bar{n} \leq 0.1$, достоверности двухкубитных операций сильно возрастут. Вместе с тем, что на квадрупольном переходе на длине волны 435 нм можно производить эффективную адресацию кубитов, открывается путь для создания компактного квантового вычислителя.

Список литературы

- [1] David P DiVincenzo. The physical implementation of quantum computation. *Fortschritte der Physik: Progress of Physics*, 48(9-11):771–783, 2000.
- [2] Wolfgang Paul. Electromagnetic traps for charged and neutral particles. *Rev. Mod. Phys.*, 62:531–540, Jul 1990.
- [3] *Ion-Trap Frequency Standards*, chapter 10, pages 315–352. John Wiley & Sons, Ltd, 2003.
- [4] J. I. Cirac and P. Zoller. Quantum computations with cold trapped ions. *Phys. Rev. Lett.*, 74:4091–4094, May 1995.
- [5] D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe, and D. Wineland. Quantum dynamics of single trapped ions. *Rev. Mod. Phys.*, 75:281–324, Mar 2003.
- [6] Семериков И. А. Лазерное охлаждение ионов Mg^+ и Yb^+ в квадрупольной ловушке Пауля для квантовой логики. *к.ф.-м.н*, июнь 2020.
- [7] *The Quantum Theory of Light*, chapter 42, page 72. Oxford Science Publications, 2000.
- [8] D. J. Wineland and Wayne M. Itano. Laser cooling of atoms. *Phys. Rev. A*, 20:1521–1540, Oct 1979.
- [9] Rüdiger Achilles and Andrea Bonfiglioli. The early proofs of the theorem of campbell, baker, hausdorff, and dynkin. *Archive for History of Exact Sciences*, 66(3):295–358, May 2012.
- [10] Q. A. Turchette, Kielpinski, B. E. King, D. Leibfried, D. M. Meekhof, C. J. Myatt, M. A. Rowe, C. A. Sackett, C. S. Wood, W. M. Itano, C. Monroe, and D. J. Wineland. Heating of trapped ions from the quantum ground state. *Phys. Rev. A*, 61:063418, May 2000.
- [11] H. Che, K. Deng, Z. T. Xu, W. H. Yuan, J. Zhang, and Z. H. Lu. Efficient raman sideband cooling of trapped ions to their motional ground state. *Phys. Rev. A*, 96:013417, Jul 2017.
- [12] Yong Wan, Florian Gebert, Fabian Wolf, and Piet O. Schmidt. Efficient sympathetic motional-ground-state cooling of a molecular ion. *Phys. Rev. A*, 91:043425, Apr 2015.

- [13] G Kirchmair, J Benhelm, F Zähringer, R Gerritsma, C F Roos, and R Blatt. Deterministic entanglement of ions in thermal states of motion. *New Journal of Physics*, 11(2):023002, feb 2009.
- [14] A. J. Rasmusson, Marissa D'Onofrio, Yuanheng Xie, Jiafeng Cui, and Philip Richerme. Optimized pulsed sideband cooling and enhanced thermometry of trapped ions. *Physical Review A*, 104(4), oct 2021.
- [15] *Собельман И. Введение в теорию атомных спектров.* Физматгиз, 1963.
- [16] Shantanu Debnath. A programmable five qubit quantum computer using trapped atomic ions. *PhD*, 2016.
- [17] Børge Hemmerling. Towards direct frequency comb spectroscopy using quantum logic. *PhD*, 2011.
- [18] Н. В. Семенин, А. С. Борисенко, И. В. Заливако, И. А. Семериков, К.Ю. Хабарова, and Н. Н. Колачевский. Определение темпов нагрева и температуры ионных кристаллов в линейной ловушке Пауля методом дефазировки осцилляций Раби. *Письма в ЖЭТФ*, 2022.
- [19] *Скалли М., Зубайри М. Квантовая оптика.*, page С. 126. Москва : Физматлит, 2003.