

---

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»  
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау  
Кафедра квантовой радиофизики

**Направление подготовки / специальность:** 03.03.01 Прикладные математика и физика  
**Направленность (профиль) подготовки:** Общая и прикладная физика

**ЗАХВАТ И ЛАЗЕРНОЕ ОХЛАЖДЕНИЕ ИОНОВ УВ+ В  
МУЛЬТИПОЛЬНОЙ ЛОВУШКЕ ДЛЯ ПРИМЕНЕНИЯ В  
МИКРОВОЛНОВОМ СТАНДАРТЕ ЧАСТОТЫ**

(бакалаврская работа)

**Студент:**

Журавлев Игорь Александрович

---

*(подпись студента)*

**Научный руководитель:**

Хабарова Ксения Юрьевна,  
канд. физ.-мат. наук

---

*(подпись научного руководителя)*

**Консультант (при наличии):**

---

*(подпись консультанта)*

Москва 2022

---

# Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	3
<b>Глава 1. Общие теоретические сведения</b> . . . . .	6
1.1. Принципы работы стандартов частоты . . . . .	6
1.2. Линейная квадрупольная ловушка Пауля . . . . .	7
1.3. Особенности мультипольных ловушек . . . . .	13
1.3.1. Мультипольный псевдопотенциал . . . . .	13
1.3.2. Условия стабильности . . . . .	15
1.3.3. Ионное облако в мультипольной ловушке . . . . .	18
1.4. Лазерное охлаждение . . . . .	19
<b>Глава 2. Микроволновый стандарт на ионах <math>^{171}\text{Yb}^+</math></b> . . . . .	23
2.1. Ион $^{171}\text{Yb}^+$ как репер частоты . . . . .	23
2.2. Лазерное охлаждение ионов $^{171}\text{Yb}^+$ . . . . .	25
2.3. Накачка основного состояния . . . . .	26
2.4. Возбуждение часового перехода . . . . .	27
2.5. Детектирование возбужденного состояния . . . . .	27
<b>Глава 3. Эксперименты и численные расчеты</b> . . . . .	29
3.1. Экспериментальная установка . . . . .	29
3.1.1. Вакуумная камера и ловушка Пауля . . . . .	29
3.1.2. Питание ловушки . . . . .	30
3.1.3. Численное моделирование полей ловушек . . . . .	31
3.1.4. Источник РЧ излучения для возбуждения часового перехода . . . . .	33
3.1.5. Лазерная система для охлаждения $^{174}\text{Yb}^+$ . . . . .	34
3.2. Эксперимент по охлаждению $^{174}\text{Yb}^+$ . . . . .	35
3.3. Численное моделирование распределения плотности ионного облака в мультипольной ловушке . . . . .	36
3.4. Межсекционная перегрузка . . . . .	39
<b>Заключение</b> . . . . .	41
<b>Список литературы</b> . . . . .	42

## Введение

Стандарты частоты играют существенную роль в развитии фундаментальной и прикладной физики. На сегодняшний день одной из наиболее точно измеряемых напрямую величин является частота, поэтому большинство ультрапрецизионных измерений основаны именно на измерении частоты. Это приводит к необходимости создания высокоточных и стабильных частотных реперов, что в свою очередь оказывает существенное влияние на развитие прикладных технологий одновременно с исследованиями в области фундаментальной науки.

Современные атомные часы, обладающие относительной нестабильностью на уровне единиц 18-го знака на временах усреднения порядка 3-х часов [1], позволяют производить проверки фундаментальных теорий. Так, например, для обнаружения гравитационного замедления времени, предсказанного Альбертом Эйнштейном, раньше требовалось наличие двух часов, разнесенных между собой на тысячи километров. Однако недавно было показано, что возможно зафиксировать гравитационное красное смещение даже на субмиллиметровом масштабе [2]. Для этих целей были произведены измерения частот электронных переходов в облаке атомов стронция, захваченных в оптическую решетку. Наличие таких высокоточных часов также важно для астрономических исследований и детектирования гравитационных волн [3], а сравнение частот двух ультрастабильных источников на длительных временах позволяет обнаруживать дрейф фундаментальных констант [4].

Методы, разработанные для оптических атомных часов, такие как усовершенствованная лазерная стабилизация [5], манипулирование атомными состояниями [6] и новые схемы захвата атомов [7], открывают уникальные возможности для исследований в области квантовой физики.

На сегодняшний день наилучшими характеристиками точности, а также стабильности на средних и больших временах усреднения обладают стандарты частоты на основе электромагнитных переходов в атомах или ионах. Использование переходов в оптическом диапазоне значительно более перспективно с точки зрения точности и стабильности, так как при увеличении частоты перехода при сравнимых значениях погрешностей относительные характеристики улучшаются на несколько порядков.

Одной из важнейших областей прикладного применения стандартов частоты является спутниковая навигация. Поскольку координаты пользовательских устройств определяются по задержке в распространении сигнала между отправителем и приемником, бортовой репер частоты должен обладать высокой стабильностью. Для данного применения на часы, оче-

видно, накладываются определенные условия: компактность, легкость, надежность и малое потребление ресурсов. По этой причине в качестве транспортируемых космических реперов частоты оказывается удобнее использовать стандарты, работающие с переходами в микроволновом диапазоне. Выбор именно микроволновых переходов обусловлен тем, что такие переходы можно достаточно легко возбуждать, а главное — сигналы с таких часов можно непосредственно использовать в современных электронных устройствах, в отличие от оптических диапазонов, требующих применения фемтосекундных гребенок частоты [8].

Космические часы, используемые в настоящее время и работающие на основе атомных пучков или газовых ячеек, имеют нестабильность порядка  $1 - 10 \times 10^{-12} / \tau^{1/2}$ , которая на больших интервалах усреднения (более одного дня) может составлять от  $1 \times 10^{-15}$  до  $10 \times 10^{-15}$  в день. Автономность работы часов на длительных временах чрезвычайно важна для космической и глобальной спутниковой навигации [9], а создание транспортируемых микроволновых стандартов частоты по-прежнему остается важной и актуальной задачей.

Наиболее перспективным микроволновым ионным стандартом на сегодняшний день является стандарт на ионе  $^{199}\text{Hg}^+$ . Данный изотоп ртути имеет наибольшую массу среди всех стабильных атомарных элементов, используемых в качестве частотных реперов, за счет чего уменьшается доплеровский сдвиг частоты при той же температуре, а также обладает рекордной величиной сверхтонкого расщепления, что обеспечивает потенциально наименьшую относительную нестабильность среди микроволновых стандартов. В 2019-м году национальным аэрокосмическим агентством США (NASA) в космос были запущены атомные часы, использующие облако захваченных ионов ртути. Устройство содержит в себе две ловушки: квадрупольную и мультипольную. Первая используется для загрузки, инициализации и детектирования состояний, а вторая для возбуждения часового перехода. Репером в данных часах является частота микроволнового перехода между двумя компонентами сверхтонкого расщепления основного состояния иона  $^{199}\text{Hg}^+$ , составляющая 40,5 ГГц. Спустя более года работы была показана нестабильность частоты на уровне  $3 \times 10^{-15}$  при интервале усреднения, равном 23-м дням, что эквивалентно отклонению во времени менее чем на 4 нс [10].

Данная дипломная работа посвящена исследованию захвата и лазерного охлаждения ионов в мультипольной ловушке, являющихся начальным этапом на пути создания транспортируемого космического микроволнового стандарта частоты на основе ионов  $^{199}\text{Hg}^+$ . Однако работа со ртутью является непростой в силу специфичности используемых переходов. Так, например, длина волны перехода, используемого для доплеровского лазерного охлаждения, лежит в глубоком ультрафиолетовом диапазоне (194 нм). Это представляет собой значительную трудность, поскольку существующие материалы для удвоения частоты

быстро деградируют под воздействием подобного излучения. Создание непрерывного когерентного излучения на такой длине волны требует наличия сложной оптической системы с несколькими лазерными источниками и нелинейными преобразованиями [11], техническая реализация чего является весьма серьезной задачей. По этой причине при создании часов на ионах Hg<sup>+</sup> зачастую используются альтернативные техники охлаждения ионов с использованием буферного газа, например, гелия [12], а также методы симпатического охлаждения [13]. Для отработки методик, тестов и настройки экспериментальной установки на первом этапе работа проводилась с использованием ионов иттербия <sup>171</sup>Yb<sup>+</sup>, имеющими примерно втрое меньшую величину сверхтонкого расщепления и схожую энергетическую структуру уровней, переходы которого, однако, лежат в более удобном с точки зрения применения частотном диапазоне. В первой главе описаны общие теоретические сведения о принципах работы стандартов частоты, особенностях линейных квадрупольных и мультипольных ловушек, а также метод лазерного охлаждения. Вторая глава отведена схеме и устройству создаваемого нами стандарта частоты. В последней части работы представлено описание проведенных экспериментов и сопутствующие вычисления.

Расчетная часть работы была произведена автором лично, экспериментальная часть проводилась при его непосредственном участии.

## Общие теоретические сведения

### 1.1. Принципы работы стандартов частоты

Стандарты частоты представляют собой приборы, способные синтезировать известные стабильные частоты с определенной точностью. Стандарты также делятся на активные и пассивные. Под «активными» понимаются устройства, в которых некоторая система (например, ансамбль возбужденных атомных осцилляторов) непосредственно генерирует сигнал определенной частоты, которая определяется внутренними характеристиками данной системы. Нас же в данной работе будут больше интересовать именно «пассивные» стандарты, представляющие собой какой-либо компонент, крайне чувствительный к воздействию поля определенной частоты. Принципиальная схема такой системы изображена на Рис. 1.1.

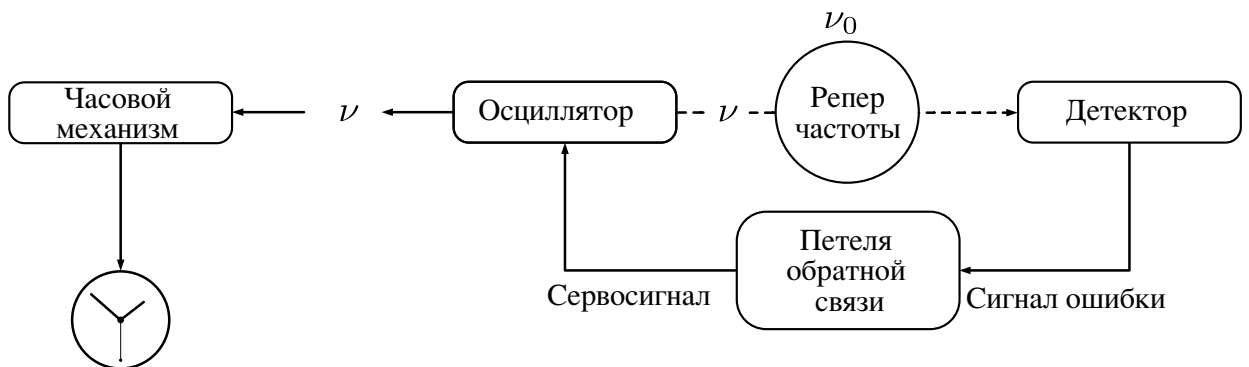


Рис. 1.1. Схематическое представление стандарта частоты и часов.

Под воздействием сигнала генератора частотная характеристика отклика репера изменяется. Это, например, может привести к появлению линии поглощения с минимумом пропускания на некоторой резонансной частоте  $\nu_0$ . Рассматривая производную симметричного сигнала поглощения, можно получить антисимметричный сигнал, который в дальнейшем использовать в качестве сигнала ошибки для генерации управляющего сервосигнала петель обратной связи, главной задачей которой является как можно более точная подстройка частоты осциллятора  $\nu$  к опорной частоте  $\nu_0$ . Необходимым критерием использования подобного устройства в качестве стандарта является стабильность и достаточная точность его частоты  $\nu$ .

## Ионные стандарты

Среди всех реализаций стандартов частоты особый интерес представляет собой ионная платформа. Наличие у ионов электрического заряда позволяет захватывать их в радиочастотные ловушки, расположенные в вакуумных камерах, удерживая тем самым частицы в локализованной области пространства. Таким образом можно уменьшить сдвиги частоты, вызванные столкновениями частиц со стенками камеры. В стандартах частоты, основанных на оптических переходах, сильно подверженных штарковским сдвигам за счет ион–ионного взаимодействия, это и вовсе позволяет работать с одиночными частицами. Дополнительная реализации техник лазерного охлаждения дает возможность подавления эффекта Доплера, который является одним из лидирующих систематических эффектов, приводящих к сдвигу часового перехода в ансамблях из большого числа частиц, что в значительной степени влияет на погрешность стандарта. Это также позволяет удерживать ионы в ловушках в течение длительного промежутка времени, достигающего вплоть до нескольких месяцев [14].

### 1.2. Линейная квадрупольная ловушка Пауля

Как уже было отмечено выше, возможность локализации ионов имеет очевидные преимущества. Однако согласно теореме Ирншоу этого невозможно добиться, используя только статические электрические поля. Поэтому для этих целей используют комбинации статического магнитного и электрического полей, представляющих собой ловушку Пеннинга, либо переменное электрическое поле. Второй тип ловушек принято называть радиочастотными ловушками или ловушками Пауля. Именно данный тип ловушек будет описан здесь согласно [15] и [16].

Рассмотрим электрическое поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ , которое создается некоторым потенциалом  $\Phi(\mathbf{r})$  внутри объема ловушки и взаимодействует с ионом, обладающим зарядом  $q = +e$ . На такой ион будет действовать сила

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = e\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -e \cdot \nabla\Phi(\mathbf{r}), \quad (1.1)$$

направленная к центру ловушки. Нам бы хотелось, чтобы сила  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  была линейна по координате  $\mathbf{r}$ , поскольку в таком случае движение частиц сводится к гармоническим колебаниям. Соответствующий скалярный потенциал  $\Phi(x, y, z)$  тогда должен иметь квадратичную зависимость от координат и может быть записан как

$$\Phi = \text{const} \cdot (ax^2 + by^2 + cz^2). \quad (1.2)$$

Условие того, что данный потенциал в каждый момент времени должен удовлетворять уравнению Лапласа  $\Delta\Phi = \nabla^2\Phi = 0$ , накладывает строгие ограничения на его параметры:

$$a + b + c = 0. \quad (1.3)$$

По данным геометрическим факторам ловушки делятся на два типа:

1. линейная ловушка Пауля  $a = 1, b = -1, c = 0$
2. трехмерная ловушка Пауля  $a = b = 1, c = -2$

Трехмерные ловушки преимущественно используются для захвата одиночных ионов, в то время как линейные ловушки значительно чаще применяются для работы с многочастичными облаками, а также с ионными цепочками в экспериментах, связанных с квантовой логикой. В случае линейной ловушки получаем следующий вид потенциала:

$$\Phi = \text{const} \cdot (x^2 - y^2). \quad (1.4)$$

Подобный двумерный квадрупольный потенциал можно создать с помощью системы из четырех гиперболических электродов. Положив разность потенциалов между соседними электродами равной  $\Phi_0$  и начальное условие  $\Phi(r_0) = \Phi_0/2$ , получаем значения электрического поля в виде

$$E_x = \frac{\Phi_0}{r_0^2}x, \quad E_y = \frac{\Phi_0}{r_0^2}y, \quad E_z = 0, \quad (1.5)$$

где  $r_0$  – расстояние от поверхности электрода до центра ловушки. Поскольку напряженность  $E_x$  линейно зависит от координаты  $x$  (закон Гука), можно ожидать, что ион будет совершать гармонические колебания вдоль оси  $x$ . В свою очередь, ион будет притягиваться к ближайшему отрицательному электроду в направлении оси  $y$ , поскольку потенциал (1.4) имеет седловидную форму, т.е. обладает в центре ловушки минимумом по оси  $x$  и максимумом вдоль оси  $y$ .

Для того, чтобы удерживать ион в обоих направлениях, потенциал двух пар электродов должен периодически изменяться. Добавим переменную составляющую  $V_{\text{ac}}$  на частоте  $\omega_{\text{rf}}$  к постоянному напряжению на электродах  $U_{\text{dc}}$ :

$$\Phi_0 = -U_{\text{dc}} + V_{\text{ac}} \cos \omega_{\text{rf}}t. \quad (1.6)$$

Координаты и компоненты скорости можно получить из уравнений движения

$$m\ddot{x} = eE(x) = \frac{e}{r_0^2}(U_{\text{dc}} - V_{\text{ac}} \cos \omega_{\text{rf}}t)x, \quad (1.7)$$



$$m\ddot{y} = eE(y) = -\frac{e}{r_0^2}(U_{dc} - V_{ac} \cos \omega_{rf}t)y, \quad (1.8)$$

которые могут быть приведены к стандартным безразмерным уравнениям Матье

$$\frac{d^2x(\tau)}{d\tau^2} + (a - 2q \cos 2\tau)x = 0, \quad (1.9)$$

$$\frac{d^2y(\tau)}{d\tau^2} - (a - 2q \cos 2\tau)y = 0 \quad (1.10)$$

путем введения замен следующего вида:

$$\tau \equiv \frac{\omega_{rf}}{2}t, \quad a \equiv \frac{4eU_{dc}}{m\omega_{rf}^2r_0^2}, \quad q \equiv \frac{2eV_{rf}}{m\omega_{rf}^2r_0^2}. \quad (1.11)$$

Данные уравнения принадлежат к классу дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, представляющими собой периодические функции от  $\tau$ . Общий вид устойчивого решения согласно теореме Флоке может быть представлен в виде

$$F_\mu(\tau) = e^{i\mu\tau} P(\tau), \quad (1.12)$$

где  $P(\tau)$  имеет тот же период, что и коэффициенты в уравнении Матье, т.е. равный  $\pi$ . Для того, чтобы решение было ограниченным, необходимо, чтобы параметр  $\mu$  являлся действительной величиной:  $\mu = \beta$ . Тогда решение уравнения Матье (1.9) для стабильного случая представляет собой линейную комбинацию решений Флоке  $F_\mu(\tau)$  и  $F_\mu(-\tau)$  и в силу периодичности функции  $P(\tau)$  может быть разложено в ряд Фурье:

$$x(\tau) = Ae^{i\beta\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n}e^{i2n\tau} + Be^{-i\beta\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n}e^{-i2n\tau}, \quad (1.13)$$

где параметр экспоненты  $\beta$  и коэффициенты  $C_{2n}$  являются функциями только от  $a$  и  $q$  и не зависят от начальных условий. Произвольные константы  $A$  и  $B$  могут быть использованы для выполнения начальных условий или нормализации конкретного решения. Подставляя данное разложение в (1.9), можно получить следующее рекуррентное соотношение для  $C_{2n}$

$$C_{2n+2} - D_{2n}C_{2n} + C_{2n-2} = 0, \quad D_{2n} = \frac{a - (2n + \beta)^2}{q}, \quad (1.14)$$

которое связывает параметр  $\beta$  с коэффициентами  $a$  и  $q$ . Вычислить зависимость  $a(q)$  для заданного  $\beta = f(a, q)$  можно, например, при помощи метода последовательных разбиений [17]. Таким образом, можно определить области стабильности движения иона на диаграмме  $a$ - $q$ , причем для движения по оси  $x$  используются параметры  $+a$  и  $+q$ , а для движения по оси  $y$  -  $(-a)$  и  $(-q)$  с учетом того факта, что  $a(q) = a(-q)$ . Стабильный захват иона зависит только от выбора параметров ловушки  $a$  и  $q$  и не зависит от начальных условий движения иона. Будем называть стабильным режимом захвата только тот режим, когда области стабильности

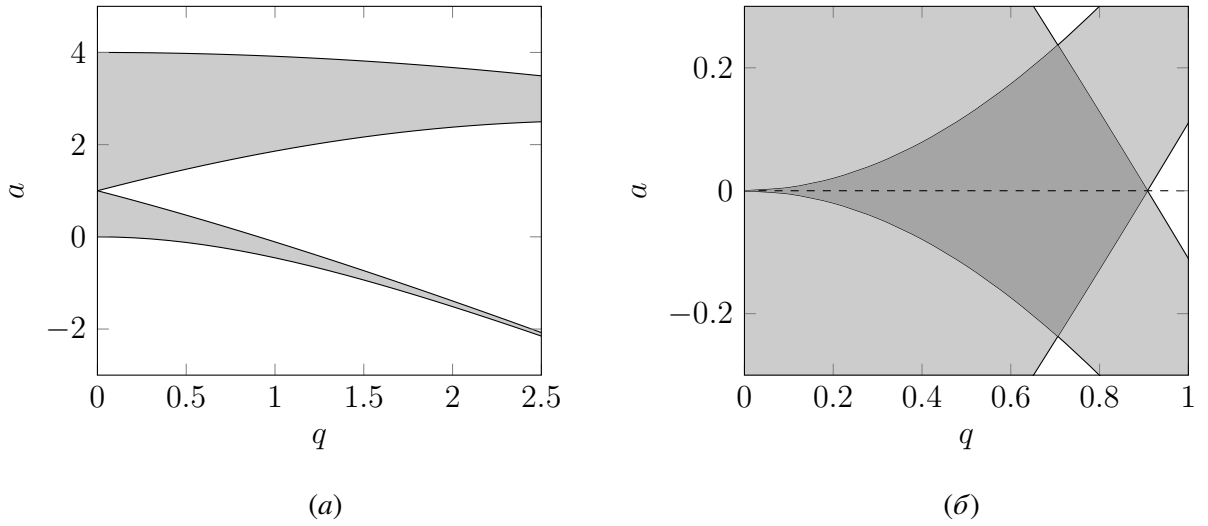


Рис. 1.2. (а) – симметричная относительно оси  $a$  диаграмма устойчивости решений уравнения Маттье для  $0 \leq \beta \leq 1$  и  $1 \leq \beta \leq 2$ , (б) – составная диаграмма для координат  $x$  и  $y$  с частичным перекрытием первой зоны устойчивости (данные взяты из [17]).

по осям  $x$  и  $y$  на диаграмме  $a$ – $q$  перекрываются (Рис. 1.2). В приближении малого порядка траектория движения иона в случае  $(a, q_x^2) \ll 1$ , который чаще всего реализуется на практике, может быть найдена, если положить  $C_{\pm 4} \cong 0$ . Тогда вместе с начальным условием  $A = B$  уравнение (1.14) приводит к

$$\beta \approx \sqrt{a + q^2/2}, \quad x(t) \approx 2AC_0 \cos\left(\beta \frac{\omega_{\text{rf}}}{2} t\right) \left[1 - \frac{q}{2} \cos(\omega_{\text{rf}} t)\right]. \quad (1.15)$$

Отсюда и с учетом (1.11) видно, что спектр движения иона в линейной ловушке Пауля представляет собой совокупность гармонического движения на так называемой секулярной частоте

$$\omega_s = \frac{\beta}{2} \omega_{\text{rf}} \quad (1.16)$$

с амплитудой  $2AC_0$  и модуляции этого движения на частоте радиочастотного поля, называемой также микродвижениями.

Рассмотрим теперь наглядно, почему ион в периодически меняющемся неоднородном электрическом поле испытывает действие постоянной удерживающей силы, как это было показано в [18]. Пусть в начальный момент времени ион находится на расстоянии  $\hat{x}$  от центра ловушки. При этом будем считать вначале, что поле  $\hat{E}$  является однородным в окрестности  $\hat{x}$ . Интегрируя в таком случае дважды уравнение движения

$$m\ddot{x} = e\hat{E} \cos \omega_{\text{rf}} t \quad (1.17)$$

и считая, что ион изначально находится в покое, получаем зависимость его координаты от

времени

$$x(t) = \hat{x} - \frac{e\hat{E}}{m\omega_{\text{rf}}^2} \cos \omega_{\text{rf}}t. \quad (1.18)$$

Таким образом, ион осуществляет описанные выше микродвижения на частоте радиочастотного поля, отставая при этом от него по фазе на  $\pi$ . Вернемся теперь к квадрупольному потенциалу и разложим электрическое поле в ряд Тейлора в окрестности точки  $\hat{x}$ , ограничившись при этом лишь первыми двумя членами

$$E(x, t) \approx E(\hat{x}) \cos \omega_{\text{rf}}t + \frac{dE(\hat{x})}{dx} (x - \hat{x}) \cos \omega_{\text{rf}}t + \dots \quad (1.19)$$

Используя теперь выражение (1.18) для разности  $x - \hat{x}$ , получаем

$$E(x, t) \approx E(\hat{x}) \cos \omega_{\text{rf}}t - \frac{eE(\hat{x})}{m\omega_{\text{rf}}^2} \frac{dE(\hat{x})}{dx} \cos^2 \omega_{\text{rf}}t, \quad (1.20)$$

что вместе с (1.5) и условием  $U_{\text{dc}} = 0$  приводит к появлению действующей на ион силы

$$F(t) \approx e \frac{V_{\text{ac}}}{r_0^2} \hat{x} \cos \omega_{\text{rf}}t - \frac{e^2 V_{\text{ac}}^2}{r_0^4 m \omega_{\text{rf}}^2} \hat{x} \cos^2 \omega_{\text{rf}}t. \quad (1.21)$$

При усреднении данного выражения по времени первое слагаемое дает нулевой вклад, а второе принимает вид

$$\langle F(\hat{x}) \rangle = -\frac{e^2 V_{\text{ac}}^2}{2r_0^4 m \omega_{\text{rf}}^2} \hat{x}. \quad (1.22)$$

Аналогичным образом можно получить

$$\langle F(\hat{y}) \rangle = -\frac{e^2 V_{\text{ac}}^2}{2r_0^4 m \omega_{\text{rf}}^2} \hat{y}. \quad (1.23)$$

Данной силе, обуславливающей секулярное движение иона, в этом приближении (являющемся адиабатическим) можно сопоставить соответствующий псевдопотенциал

$$\Psi(x, y) = \frac{e^2 V_{\text{ac}}^2}{4r_0^4 m \omega_{\text{rf}}^2} (x^2 + y^2). \quad (1.24)$$

Секулярную частоту медленных радиальных колебаний можно вычислить, приравняв энергию иона в данном псевдопотенциале и его кинетическую энергию:

$$e\Psi(x, y) = \frac{1}{2} m \omega_s^2 (x^2 + y^2), \quad (1.25)$$

что дает

$$\omega_s = \frac{eV_{\text{ac}}}{\sqrt{2} m \omega_{\text{rf}} r_0^2}. \quad (1.26)$$

Максимум потенциала (1.24) достигается при условии  $x^2 + y^2 = r_0^2$  и принимает значение

$$\Psi_{\text{max}} = \frac{e^2 V_{\text{ac}}^2}{4r_0^2 m \omega_{\text{rf}}^2} = \frac{eqV_{\text{ac}}}{8} = \frac{q^2 m \omega_{\text{rf}}^2 r_0^2}{2} = \frac{\omega_s^2 r_0^2 m}{16}. \quad (1.27)$$

Таким образом, можно несколькими способами увеличить глубину псевдопотенциала. Однако, поскольку увеличение параметра  $q$  приводит к дестабилизации движения иона, для этих целей достаточно увеличивать частоту питания ловушки и ее характерные размеры одновременно с увеличением амплитуды радиочастотного поля. Экспериментально глубину псевдопотенциала также можно установить по величине секулярной частоты, зная массу иона.

Поскольку рассмотренный нами квадрупольный потенциал позволяет ограничивать движение иона только в радиальном направлении, возникает также необходимость осуществления аксиального удержания. Для этих целей используются статические поля. Рассмотрим вклад дополнительного квадратичного потенциала

$$\Phi_z = \kappa U_z z^2, \quad (1.28)$$

создаваемого вдоль оси  $z$  и имеющего некоторый геометрический фактор  $\kappa$ .

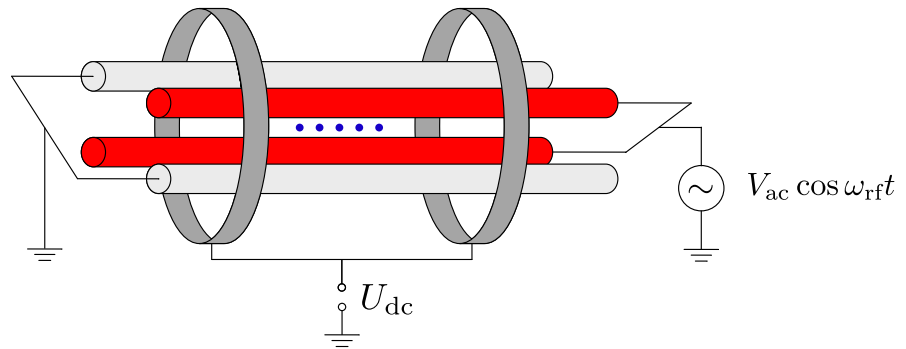


Рис. 1.3. Схема одной из наиболее распространенных конфигураций квадрупольной ловушки Пауля с кольцевыми удерживающими электродами.

В таком случае ион будет совершать вдоль оси ловушки гармонические колебания на аксиальной частоте

$$\omega_z = \sqrt{\frac{2\kappa e U_z}{m}} \quad (1.29)$$

в потенциальной яме глубиной

$$\Psi_z = \kappa e U_z z_0^2. \quad (1.30)$$

Здесь  $z_0$  – характерный размер ловушки вдоль оси  $z$ . При добавлении данного поля параметр  $a$  в уравнениях Матье (1.9) и (1.10) преобразуется как

$$a'_x = \frac{4eU_{dc}}{m\omega_{rf}^2 r_0^2} - \frac{4\kappa e U_z}{m\omega_{rf}^2}, \quad a'_y = -\frac{4eU_{dc}}{m\omega_{rf}^2 r_0^2} - \frac{4\kappa e U_z}{m\omega_{rf}^2}. \quad (1.31)$$

Используя (1.15), находим измененную секулярную частоту

$$\omega'_s = \sqrt{\omega_s^2 - \omega_z^2/2}. \quad (1.32)$$

Данное изменение эффективной секулярной частоты приводит к уменьшению глубины радиального псевдопотенциала, что нужно учитывать на эксперименте. Для создания подобного удерживающего потенциала можно использовать чашечные или, как это показано на Рис. 1.3, кольцевые электроды.

### 1.3. Особенности мультипольных ловушек

Главным преимуществом мультипольных ловушек, в сравнении с квадрупольными, является значительно более медленный рост поля вблизи оси удержания. Однако на границах их псевдопотенциал имеет резкие ”стенки”, крутизна которых зависит от мультипольности ловушки. Это в частности приводит к тому, что при том же числе ионов в облаке его плотность в мультипольной ловушке оказывается значительно меньше. Снижение плотности ионного облака приводит к уменьшению столкновительного сдвига часового перехода, а также позволяет в значительной степени ограничить эффект Доплера, связанный с микродвижениями. Таким образом, поскольку ионы в мультипольных ловушках могут находиться лишь малое время в области сильного радиочастотного поля, темпы РЧ нагрева так же малы. Это позволяет, например, исследовать в них низкотемпературные столкновения. Здесь будет описана теория мультипольных ловушек и ионных облаков с большим числом частиц согласно [19] и [20].

#### 1.3.1. Мультипольный псевдопотенциал

Рассмотрим вновь уравнение Лапласа, которое в свободной от зарядов области имеет простой вид

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.33)$$

В силу симметрий данное уравнение удобно рассматривать в сферических координатах  $(r, \theta, \varphi)$ . Типичное решение представляется в виде суперпозиции функций вида

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = (Ar^n + Br^{-n-1})P_n^m(\cos \theta)(C \sin m\varphi + D \cos m\varphi), \quad (1.34)$$

где  $A, B, C$  и  $D$  являются постоянными коэффициентами,  $P_n^m$  – присоединенные многочлены Лежандра, а  $n$  и  $m$  – натуральные числа. Задача для бесконечно длинных цилиндрических проводников, когда граничные условия не зависят от координаты  $z$ , может быть описана в

полярных координатах  $(r, \varphi)$ . В таком случае общее решение уравнения Лапласа принимает следующий вид для  $n > 0$ :

$$\Phi(\mathbf{r}, \varphi) = (Ar^n + Br^{-n})(C \sin n\varphi + D \cos n\varphi), \quad (1.35)$$

и для  $n = 0$ :

$$\Phi(\mathbf{r}, \varphi) = (A + B \ln r)(C + D\varphi). \quad (1.36)$$

Мультипольный потенциал может быть получен из (1.35), если положить  $\Phi(r = r_0, \varphi) = \Phi_0 \cos n\varphi$  и  $\Phi(r = 0, \varphi) = 0$ , а радиальную координату  $r$  измерять от центра ловушки в нормированных единицах  $\hat{r} = r/r_0$ :

$$\Phi(r, \varphi) = \Phi_0 \hat{r}^n \cos n\varphi. \quad (1.37)$$

Компоненты электрического поля  $\mathbf{E} = (E_r, E_\varphi)$  в полярных координатах могут быть найдены через градиент потенциала  $\Phi$ :

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial}{\partial r}\Phi, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) = \frac{\Phi_0}{r_0} n \hat{r}^{n-1} (-\cos n\varphi, \sin n\varphi). \quad (1.38)$$

Используя декартово представление вектора электрического поля

$$(E_x, E_y) = \frac{\Phi_0}{r_0} n \hat{r}^{n-1} (-\cos(n-1)\varphi, \sin(n-1)\varphi) \quad (1.39)$$

и заменяя по аналогии с (1.6) потенциал  $\Phi_0$  суммой

$$\Phi_0 = U_0 - V_0 \cos \Omega t, \quad (1.40)$$

получаем уравнение движения в декартовых координатах  $\hat{\mathbf{r}} = (x/r_0, y/r_0)$

$$\ddot{\hat{\mathbf{r}}} + F(t) \hat{r}^{n-1} (-\cos(n-1)\varphi, \sin(n-1)\varphi) = 0. \quad (1.41)$$

Здесь мы ввели времязависимую функцию

$$F(t) = n \frac{eU_0}{mr_0^2} - n \frac{eV_0}{mr_0^2} \cos \Omega t. \quad (1.42)$$

Очевидно, что при  $n > 2$  данное дифференциальное уравнение является нелинейным, и, в отличие от квадрупольного, в данном случае возникают дополнительные сложности, поскольку движения по  $x$  и  $y$  больше не являются независимыми. Из (1.38) напрямую следует выражение для абсолютной величины осциллирующего поля

$$|E_0| = \frac{V_0}{r_0} n \hat{r}^{n-1}, \quad (1.43)$$

где потенциал  $\Phi_0$  заменен на  $V_0$  согласно (1.40). Как это было видно из рассуждений, описывающих удерживающую силу в квадрупольной ловушке, выражение для псевдопотенциала имеет вид

$$V^*(\mathbf{r}) = \frac{e^2 E_0^2}{4m\Omega^2} + e\Phi_s, \quad (1.44)$$

где  $\Phi_s$  - электростатический потенциал ловушки. Подставляя (1.43) и статический мультипольный потенциал  $eU_0 \hat{r}^n \cos n\varphi$  в (1.44), получаем следующее выражение для эффективного потенциала

$$V^* = \frac{n^2}{4} \frac{e^2}{m\Omega^2} \frac{V_0^2}{r_0^2} \hat{r}^{2n-2} + eU_0 \hat{r}^n \cos n\varphi. \quad (1.45)$$

Чтобы численно оценивать псевдопотенциал  $V^*$ , удобно ввести дополнительный параметр – характерную энергию  $\varepsilon$ , которая включала бы в себя такие важные величины как масса, частота и внутренний радиус ловушки  $r_0$ :

$$\varepsilon = \frac{1}{2n^2} m\Omega^2 r_0^2. \quad (1.46)$$

В этих терминах, псевдопотенциал (1.45) принимает вид

$$V^* = \frac{1}{8} \frac{(eV_0)^2}{\varepsilon} \hat{r}^{2n-2} + eU_0 \hat{r}^n \cos n\varphi. \quad (1.47)$$

Чтобы гарантировать, что ион, начавший движение рядом с центром ловушки с  $U_0 > 0$ , не достигнет электрода, необходимо выполнение условия  $V^*(\hat{r} = 1) > 0$ . Тогда из (1.47) напрямую получаем условие

$$eU_0 < \frac{1}{8} \frac{(eV_0)^2}{\varepsilon}. \quad (1.48)$$

### 1.3.2. Условия стабильности

Как это уже было показано в разделе 1.2, для частного случая квадрупольного потенциала области устойчивого движения полностью описываются хорошо известной диаграммой стабильности  $(a, q)$  (см. Рис 1.2). Однако эти простые критерии стабильности не могут быть расширены на общий случай геометрий полей, когда движение описывается нелинейными дифференциальными уравнениями, и решения являются связными.

Рассмотрим классическое уравнение движение иона зарядом  $+e$  и массой  $m$  в комбинации статического  $\mathbf{E}_s(\mathbf{r})$  и радиочастотного  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \cos(\Omega t + \delta)$  полей

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \cos(\Omega t + \delta) + e\mathbf{E}_s(\mathbf{r}), \quad (1.49)$$

для которого введем амплитудный вектор  $\mathbf{a}$  следующим образом

$$\mathbf{a} = \frac{e\mathbf{E}_0}{m\Omega^2}. \quad (1.50)$$

Разложим также радиус–вектор частицы на две составляющие, выделяя быстро осциллирующую компоненту  $\mathbf{R}_1(t)$ :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}_0(t) + \mathbf{R}_1(t), \quad (1.51)$$

где

$$\mathbf{R}_1(t) = -\mathbf{a}(t) \cos \Omega t. \quad (1.52)$$

Область, в которой остается справедливым приближение псевдопотенциала, обычно ограничивается высокой частотой и медленным изменением во времени остальных величин (адиабатическое приближение). Для количественного сравнения *медленных* и *быстрых* изменений, таких как  $\dot{\mathbf{a}} \ll \Omega \mathbf{a}$  и  $\ddot{\mathbf{R}}_0 \ll \Omega \dot{\mathbf{R}}_0$ , принято вводить безразмерное отношение, которое сравнивает две характерные величины. Выбор такого параметра в нашем случае мотивирован тем, что в разложении электрического поля в ряд Тейлора

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{R}_0 - \mathbf{a} \cos \Omega t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{R}_0) - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{E}_0(\mathbf{R}_0) \cos \Omega t + \dots \quad (1.53)$$

при выводе эффективного потенциала мы ограничиваемся лишь первыми двумя членами. Поэтому мы требуем, чтобы на всем расстоянии осцилляций, т.е. на  $2\mathbf{a}$ , изменение поля было мало по сравнению с величиной самого поля

$$|2(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{E}_0| < |\mathbf{E}_0|. \quad (1.54)$$

Используя данное соотношение, определим [21] наш характерный параметр  $\eta$  как

$$\eta = \frac{|2(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{E}_0|}{|\mathbf{E}_0|}. \quad (1.55)$$

Подставляя сюда  $\mathbf{a}$  из (1.50) и используя соотношение векторного анализа

$$(\mathbf{E}_0 \cdot \nabla) \mathbf{E}_0 = \frac{1}{2} \nabla E_0^2 - \mathbf{E}_0 \times (\nabla \times \mathbf{E}_0) = \frac{1}{2} \nabla E_0^2, \quad (1.56)$$

получаем определение для *адиабатического параметра*  $\eta$  в окончательной форме:

$$\eta = \frac{2e|\nabla E_0|}{m\Omega^2}. \quad (1.57)$$

В случае  $|\nabla E_0| = 0$  мы имеем однородное поле и точное решение в виде

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) - \mathbf{a} \cos \Omega t. \quad (1.58)$$

Условие же  $|\nabla E_0| = \text{const}$  приводит к квадрупольному потенциалу, и тогда  $\eta$  совпадает с параметром  $q$ , введенным в (1.11). Поскольку вектор

$$\nabla E_0 = \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) |\mathbf{E}_0| \quad (1.59)$$



имеет только радиальную компоненту, то общий вид параметра  $\eta$  может быть легко получен из (1.57) с использованием (1.43):

$$\eta = 2n(n-1) \frac{eV_0}{m\Omega^2 r_0^2} \hat{r}^{n-2}. \quad (1.60)$$

Помимо этого важно определить максимально допустимую величину адиабатического параметра  $\eta_m$ . В [21] было показано, что значение  $\eta_m = 0.3$  гарантирует адиабатичность для большинства практических применений. Это также согласуется с ограничением  $\eta = q < 0.4$ , зачастую выполняющемся при описании квадрупольных ловушек, используя приближение эффективного потенциала.

Чтобы попытаться обобщить параметры  $(a, q)$  на случай мультиполя, определим, используя величину (1.46), параметры  $a_n$  и  $q_n$  как

$$a_n = 4n(n-1) \frac{eU_0}{m\Omega^2 r_0^2} = \frac{n-1}{n} \frac{eV_0}{\varepsilon}, \quad (1.61)$$

и

$$q_n = 2n(n-1) \frac{eV_0}{m\Omega^2 r_0^2} = 2 \frac{n-1}{n} \frac{eU_0}{\varepsilon}, \quad (1.62)$$

что приводит к упрощению уравнения (1.48):

$$a_n < \frac{n}{4(n-1)} q_n^2. \quad (1.63)$$

Для квадрупольного поля данное выражение,  $a_2 < q_2^2/2$ , описывает первую зону стабильности на диаграмме  $(a_2, q_2)$  [22]. Однако, несмотря на такую схожесть, существуют некоторые ограничения, которые могут сделать невозможным построение диаграммы стабильности  $(a_n, q_n)$ , исходя из выражения (1.63). Во-первых, (1.63) справедливо только в условии адиабатичности, и возникает вопрос, существует ли какое-либо обобщение для расширения границ до  $q_n > 0.3$ . Во-вторых, сравнивая (1.62) и (1.60), легко понять, что параметры  $q_n$  и  $\eta$  совпадают только для  $n = 2$ , в то время как для полного описания мультиполя необходима зависимость адиабатического параметра  $\eta$  от  $\hat{r}$ , которая может быть записана в виде

$$\eta = q_n \hat{r}^{n-2}. \quad (1.64)$$

В серии работ [23] путем больших вычислительных усилий были приведены диффузные диаграммы переопределенных параметров

$$a_{n_s} = \frac{n^2}{4(n-1)} a_n \quad \text{и} \quad q_{n_s} = \frac{n^2}{4(n-1)} q_n, \quad (1.65)$$

полученных путем сравнения классических уравнений Матье (1.9) и (1.10) с уравнением движения (1.41), в котором время  $t$  умножено на безразмерный параметр  $\xi = \Omega t/2$ . Выводы

общей значимости, изложенные авторами, заключаются в том, что простая классификация с помощью диаграмм  $(a_{n_s}, q_{n_s})$  не представляется возможной, в особенности из-за зависимости данных параметров от начальных условий. Более серьезной проблемой стала неспособность коэффициентов  $a_n$  и  $q_n$  описывать нелинейную  $\hat{r}^{n-1}$  зависимость в (1.41), которая в нашем адиабатическом рассмотрении отражается в  $\hat{r}$ -зависимости параметра стабильности,  $\eta = q_n \hat{r}^{n-2}$ . Всё это приводит к тому, что в мультипольных ловушках ( $n > 2$ ) области стабильности куда лучше описываются с помощью адиабатического параметра  $\eta(r)$ , нежели  $q_n$ . В [23] было показано поперечное сечение ионного пучка с максимальным радиусом  $\hat{r} < 0.2$ . Стабильный случай соответствовал  $\eta = 5.33\hat{r}^2$ , что приводит к  $\eta(\hat{r} < 0.2) < 0.21$ . Для случая  $\eta = 37.5\hat{r}^2$  многие ионы могли находиться в области  $\hat{r} \geq 0.14$ , в которой  $\eta = 0.7$  или выше. Это позволяет предполагать дальнейшую потерю ионов, до тех пор, пока остаточная часть облака не окажется достаточно близка к оси удержания, поскольку  $\eta(\hat{r} = 0) = 0$  для  $n > 2$ .

### 1.3.3. Ионное облако в мультипольной ловушке

В этом разделе мы рассмотрим теорию многочастичных ионных облаков на примере решения уравнения Больцмана, которое позволяет описывать пространственное распределение ионов, находящихся в потенциальной яме мультипольного потенциала при температуре  $T$ . Данный профиль плотности будет являться двухмерным и подходить для случая длинных линейных конфигураций ловушек, когда области действия ограничивающих полей малы в сравнении с длиной самой ловушки [20].

Итак, положим постоянную компоненту напряжения ловушки равной нулю. Тогда псевдопотенциал  $V^*$  частицы зарядом  $q$  и массой  $m$  в линейной мультипольной ловушке согласно (1.45) дается выражением

$$V^*(r) = \frac{k^2}{16} \frac{q^2 V_0^2}{m \Omega^2 r_0^2} \hat{r}^{2k-2}. \quad (1.66)$$

Здесь число электродов, составляющих ловушку, равно  $2k$ , рабочая частота ловушки равна  $\Omega$ , внутренний радиус ловушки –  $r_0$ , а амплитуда радиочастотного напряжения составляет  $V_0/2$  (пиковое напряжение между соседними электродами равно  $V_0$ ). Для радиальной плотности  $n(r)$  ионов, находящихся в мультипольной ловушке при температуре  $T$ , справедливо распределение Больцмана [24]

$$n(r) = n(0) \exp \left\{ \frac{-V^*(r) - q\varphi_{sc}(r)}{k_B T} \right\}. \quad (1.67)$$

Используя уравнение Пуассона для пространственного зарядового потенциала ионного облака

$$\nabla^2 \varphi_{sc}(r) = -qn(r)/\epsilon_0, \quad (1.68)$$

находим, что плотность  $n(r)$  удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$n''(r) + \frac{n'(r)}{r} - \frac{n'(r)^2}{n(r)} - \frac{n(r)^2}{n_0 \lambda_D^2} = -k^2(k-1)^2 \frac{n(r)}{4\lambda_D^2} \hat{r}^{2k-4}. \quad (1.69)$$

Здесь  $n_0 = 2\varepsilon_0 m \omega^2 / q^2$  – плотность насыщения или плотность псевдозаряда ионов в ловушке с секулярной частотой  $\omega$ , а  $\lambda_D^2 = k_B T / (2m\omega^2)$  – плазменная Дебаевская длина.

Чтобы определить вклад квадратичного эффекта Доплера ионного облака с профилем плотности, удовлетворяющим уравнению (1.69), нам необходимо, как это будет видно дальше, знать величину скорости микродвижений, которая дается выражением

$$\langle v^2 \rangle = \frac{k^2}{4} \omega^2 r_0^2 \hat{r}^{2k-2} \quad (1.70)$$

и может быть усреднена по распределению плотности для определения средней скорости микродвижений.

## 1.4. Лазерное охлаждение

Одним из наиболее эффективных методов подавления эффекта Доплера и увеличения времени взаимодействия частиц с полем является их охлаждение. Конкретные способы лазерного охлаждения варьируются в зависимости от типа частиц, участвующих в эксперименте. Однако общая идея для эффективного лазерного охлаждения является схожей: за счет выборочного направления поглощения частицей кванта электромагнитного поля, а также изотропии при его спонтанном излучении, в силу закона сохранения энергии частица теряет часть своей кинетической энергии, что влечет за собой уменьшение ее скорости. Далее будет изложен метод доплеровского охлаждения, основанный на этом принципе, согласно [15] и [16].

**Оптическое трение.** Рассмотрим процесс поглощения двухуровневым атомом фотона из лазерного поля и его последующее спонтанное переизлучение. Поскольку частота, воспринимаемая приемником, зависит от его скорости, лазерное поле должно быть отстроено в красную область спектра от резонансной частоты перехода между основным и возбужденным уровнями атома. Тогда эффективная отстройка будет складываться из отстройки лазера  $\Delta = \omega - \omega_0$  и доплеровского сдвига:  $\delta_{\text{эфф}} = \Delta - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ . Будем считать что при классическом движении,  $v(t) = v(0) \cos(\nu t)$ , в квадратичном псевдопотенциале время распада  $\Gamma$  много меньше периода осцилляций  $\nu$ , т.е. за время одного цикла поглощения–излучения скорость

иона не успевает измениться. В этом приближении радиационное воздействие на ион со стороны лазерного поля может быть интерпретировано как действие постоянной силы, зависящей от скорости самого иона. Если ион движется вдоль направления лазерного пучка, в каждом процессе поглощения он будет приобретать дополнительный импульс  $\Delta p = \hbar k$ . Изотропное излучение впоследствии приведет к нулевому изменению импульса в среднем. Таким образом, ион вдоль выделенного направления будет постоянно поглощать фотон, теряя при этом скорость, чему может быть сопоставлена эффективная сила оптического трения

$$F = \hbar k \Gamma \rho_{ee}, \quad (1.71)$$

пропорциональная скорости распада и вероятности нахождения в возбужденном состоянии, которая согласно [25] дается выражением

$$\rho_{ee} = \frac{s/2}{1 + s + (2\delta_{\text{эфф}}/\Gamma)^2}. \quad (1.72)$$

Здесь  $s = 2|\Omega_R|^2/\Gamma^2$  – параметр насыщения, пропорциональный квадрату частоты Раби  $\Omega_R$ . При малых скоростях ( $v < \Gamma\lambda$ ) данное выражение может быть разложено до линейных членов по скорости  $v$ , после чего выражение (1.71) приобретает вид

$$F \approx F_0(1 + \kappa v), \quad (1.73)$$

где введены обозначения

$$F_0 = \hbar k \Gamma \frac{s/2}{1 + s + (2\Delta/\Gamma)^2}, \quad \kappa = \frac{8k\Delta/\Gamma^2}{1 + s + (2\Delta/\Gamma)^2}. \quad (1.74)$$

Скорость охлаждения за счет вязкого трения тогда можно получить, из соотношения

$$\dot{E}_c = \left\langle \frac{\partial p^2}{\partial t} \frac{1}{2m} \right\rangle = \left\langle \dot{p} \frac{p}{m} \right\rangle = \langle F(v)v \rangle = F_0(\langle v \rangle + \kappa \langle v^2 \rangle) = F_0 \kappa \langle v^2 \rangle, \quad (1.75)$$

с учетом того, что для захваченного иона  $\langle v \rangle = 0$ .

**Эффект отдачи.** Однако, ион не будет приведенным выше образом охладиться до нулевой температуры, как это может показаться. Это связано с постоянными поглощением и испусканием фотонов. Из закона сохранения энергии вытекает соотношение

$$\frac{p_1^2}{2m} + E_1 + \hbar\omega = \frac{p_2^2}{2m} + E_2, \quad (1.76)$$

а для импульса фотона с волновым числом  $k = \omega/c$ , испускаемого или поглощаемого двухуровневой системой с энергиями основного и возбужденного состояний  $E_1$  и  $E_2$  соответственно ( $E_2 > E_1$ ) справедлив закон сохранения

$$\mathbf{p}_1 + \hbar \mathbf{k} = \mathbf{p}_2. \quad (1.77)$$

Здесь  $\mathbf{p}_1$  – импульс атома до поглощения, а  $\mathbf{p}_2$  – после. Подставляя (1.77) в (1.76) и вводя обозначения

$$\hbar\omega_0 = E_2 - E_1, \quad \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \hbar\mathbf{k}_1}{m} = \mathbf{v}_1 \cdot \hbar\mathbf{k}, \quad (1.78)$$

получаем для поглощаемого фотона

$$\hbar\omega = \hbar\omega_0 + \mathbf{v}_1 \cdot \hbar\mathbf{k} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad (1.79)$$

а для для испускаемого аналогично

$$\hbar\omega = \hbar\omega_0 + \mathbf{v}_2 \cdot \hbar\mathbf{k} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (1.80)$$

Таким образом, энергия поглощенного или излученного фотона отличается от разницы энергий основного и возбужденного состояний линейным по скорости слагаемым  $\mathbf{v} \cdot \hbar\mathbf{k}$ , которое соответствует линейному эффекту Доплера, и слагаемым  $\hbar^2 k^2 / (2m)$ , возникающим вследствие эффекта отдачи. Отсюда напрямую следует, что в случае изначально покоящегося атома ( $v_1 = v_2 = 0$ ) разница энергий излученного и поглощенного фотонов составляет

$$\hbar\Delta\omega = \frac{(\hbar\omega)^2}{m c^2}. \quad (1.81)$$

В релятивистском случае закон сохранения энергии выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \hbar\omega &= \sqrt{p_2^2 c^2 + (m_0 c^2 + \hbar\omega_0)^2} - \sqrt{p_1^2 c^2 + m_0^2 c^4} = \\ &= (m_0 c^2 + \hbar\omega_0) \sqrt{1 + \frac{p_2^2 c^2}{(m_0 c^2 + \hbar\omega_0)^2}} - m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{p_1^2 c^2}{m_0^2 c^4}}. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Разложение данного выражения в ряд Тейлора до порядка  $v^2/c^2$  дает

$$\hbar\omega \approx \hbar\omega_0 + \frac{p_2^2 c^2}{2m_0 c^2 \left(1 + \frac{\hbar\omega_0}{m_0 c^2}\right)} - \frac{p_1^2 c^2}{2m_0 c^2}. \quad (1.83)$$

Еще раз раскладывая знаменатель, получаем

$$\hbar\omega \approx \hbar\omega_0 + \frac{p_2^2 c^2}{2m_0 c^2} - \hbar\omega_0 \frac{p_2^2 c^2}{m_0^2 c^4} - \frac{p_1^2 c^2}{2m_0 c^2} \quad (1.84)$$

и, учитывая закон сохранения импульса при поглощении

$$p_2^2 = p_1^2 + 2\mathbf{p}_1 \cdot \hbar\mathbf{k}_1 + \hbar^2 k^2, \quad (1.85)$$

приходим окончательно к выражению в случае поглощения:

$$\hbar\omega = \hbar\omega_0 + \hbar\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{k} + \frac{(\hbar\omega)^2}{2m_0 c^2} - \hbar\omega_0 \frac{v_1^2}{2c^2} + \dots \quad (1.86)$$

и в случае излучения:

$$\hbar\omega = \hbar\omega_0 + \hbar\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{k} - \frac{(\hbar\omega)^2}{2m_0c^2} - \hbar\omega_0 \frac{v_1^2}{2c^2} + \dots \quad (1.87)$$

Данные поправки к энергии появляются в силу нелинейной зависимости между энергией и импульсом у частиц с ненулевой массой. Таким образом, в системе отсчета частицы, движущейся со скоростью  $\mathbf{v}$  в поле плоской электромагнитной волны с волновым вектором  $\mathbf{k}$  частота дается выражением

$$\nu = \nu_0 + \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{2\pi} - \frac{v^2}{2c^2}\nu_0. \quad (1.88)$$

Ее отличие от резонансной частоты перехода состоит из вкладов эффекта Доплера первого и второго (называемого также в дальнейшем квадратичным эффектом Доплера) порядков.

**Доплеровский предел.** Несмотря на нулевое среднее изменение импульса иона в процессе охлаждения, его средняя величина  $\langle \Delta p^2 \rangle \neq 0$ . По этой причине помимо изменения энергии атома за счет импульса фотона необходимо также брать во внимание энергию отдачи. Следуя этим соображениям, скорость нагрева, связанного с переизлучением, можно оценить как

$$\dot{E}_h = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle p^2 \rangle \simeq \frac{1}{2m} (\hbar k)^2 \Gamma \rho_{ee}(v=0). \quad (1.89)$$

Равновесие достигается при выравнивании темпов нагрева и охлаждения:

$$\dot{E}_h = \dot{E}_c, \quad (1.90)$$

что вместе с (1.75) и (1.89) дает соотношение

$$m \langle v^2 \rangle = k_B T = \frac{\hbar \Gamma}{8} \left[ (1+s) \frac{\Gamma}{2\Delta} + \frac{2\Delta}{\Gamma} \right]. \quad (1.91)$$

Отсюда находим минимум больцмановской температуры (*доплеровский предел*)

$$T_{\min} = \frac{\hbar \Gamma \sqrt{1+s}}{4k_B}, \quad (1.92)$$

достигаемый при величине отстройки, равной

$$\Delta = -\frac{\Gamma}{2} \sqrt{1+s}. \quad (1.93)$$

## Микроволновый стандарт на ионах $^{171}\text{Yb}^+$

### 2.1. Ион $^{171}\text{Yb}^+$ как репер частоты

Существует 7 стабильных изотопов иттербия, наиболее распространенным из которых является изотоп  $^{174}\text{Yb}$ , чья доля составляет 31.8% естественного иттербия. Однако лишь два изотопа обладают ненулевым спином ядра:  $I(^{171}\text{Yb}) = 1/2$  и  $I(^{173}\text{Yb}) = 5/2$ , что обеспечивает наличие сверхтонкой структуры.

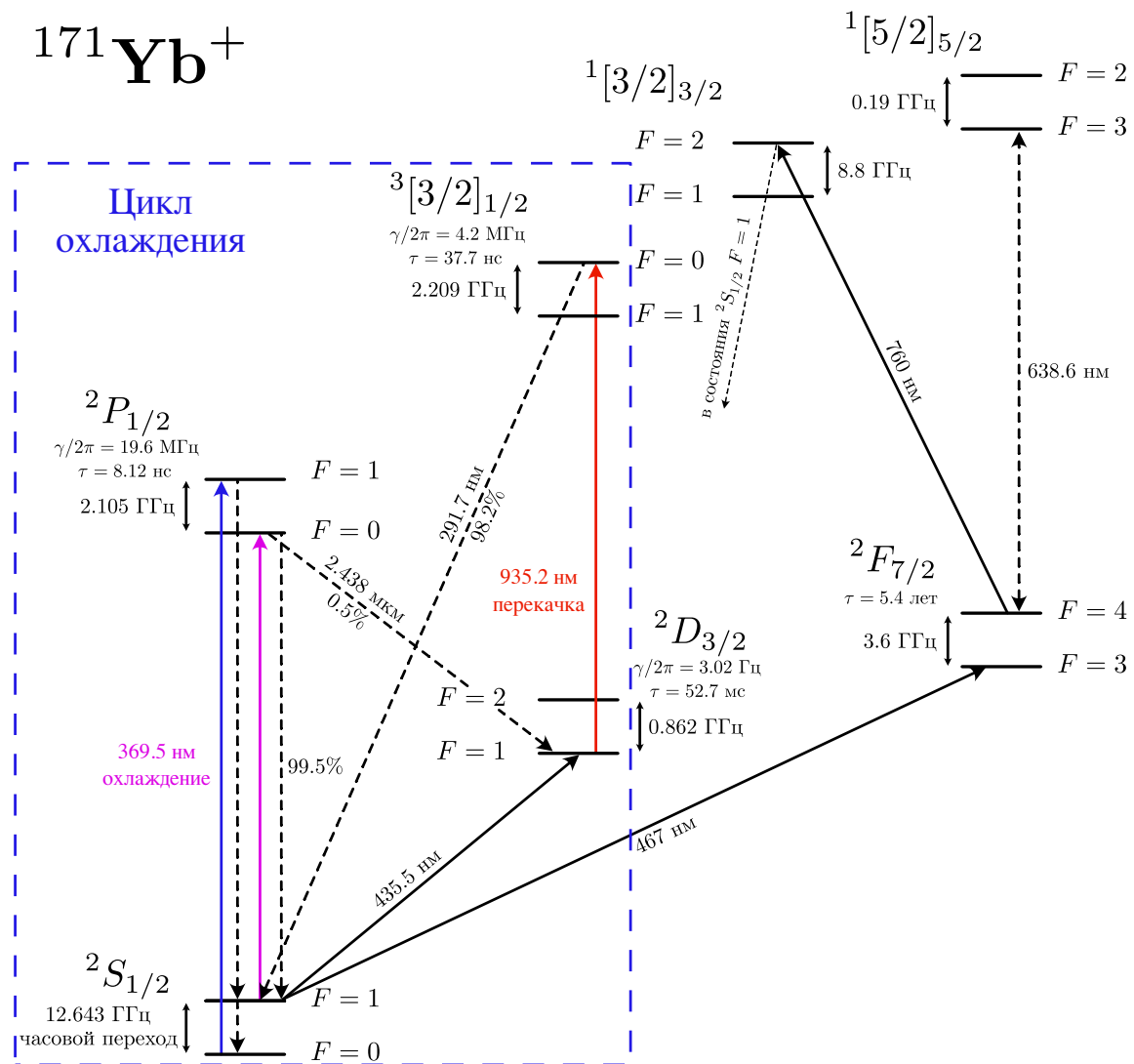


Рис. 2.1. Частичная схема энергетических уровней иона  $^{171}\text{Yb}^+$ , а также цикл охлаждения.

Для использования в качестве стандарта частоты выбор останавливается на изотопе  $^{171}\text{Yb}$  в силу более простой структуры энергетических уровней, которая изображена на Рис. 2.1. Особый интерес будет представлять расщепление по полному магнитному моменту

атома  $F$  основного состояния  ${}^2S_{1/2}$ , переход между компонентами которого будет являться часовым, а также подуровни  $F = 0$  и  $F = 1$  терма  ${}^2P_{1/2}$ , используемые для охлаждения, инициализации и детектирования состояний. Согласно [26], величина сверхтонкого расщепления в атомной системе может быть найдена как

$$\Delta E_{\text{HF}} = \frac{1}{2}KA + \frac{\frac{3}{2}K(K+1) - 2I(I+1)J(J+1)}{2I(2I-1)2J(2J-1)}B, \quad (2.1)$$

где  $A$  и  $B$  – константы сверхтонкого расщепления, а

$$K = F(F+1) - I(I+1) - J(J+1). \quad (2.2)$$

Величины сверхтонкого расщепления основного состояния  ${}^2S_{1/2}$  и терма  ${}^2P_{1/2}$  экспериментально определены в [27] и [28] и равны

$$\begin{aligned} {}^2S_{1/2}(F=0 \leftrightarrow F=1) &: 12.642 \text{ ГГц}, \\ {}^2P_{1/2}(F=0 \leftrightarrow F=1) &: 2.105 \text{ ГГц}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Выбор перехода между подуровнями  ${}^2S_{1/2} |F=0\rangle \leftrightarrow {}^2S_{1/2} |F=1\rangle$  в качестве часового обусловлен тем, что дипольный переход между данными компонентами в силу одинаковой четности запрещен. Вероятность же разрешенного магнито–дипольного перехода согласно [29] определяется величиной

$$\Gamma_{\text{HF}} = \frac{64\pi^4}{3hc^3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left(\frac{e\hbar}{2m}\right)^2 \frac{\nu^3 S_m}{2F_{\text{upp}} + 1} \sim 10^{-12} \text{ с}^{-1}. \quad (2.4)$$

Здесь сила линии  $S_m$  выражается через величины

$$S_{(\text{hfs})} = \frac{(I+J+F+2)(J+F-I+1)(I+F-J+1)(I+J-F)}{4J(2J+1)(J+1)(F+1)} \quad (2.5)$$

и

$$S_{(\text{line})} = \frac{2J+1}{4J(J+1)} \left[ 3J(J+1) + S(S+1) - L(L+1) \right]^2 \quad (2.6)$$

как

$$S_m = S_{(\text{hfs})} S_{(\text{line})}. \quad (2.7)$$

Таким образом, время жизни состояния  ${}^2S_{1/2} |F=1\rangle$  составляет порядка  $10^4$  лет.

При наличии внешнего магнитного поля снимается трехкратное вырождение уровня  ${}^2S_{1/2} |F=1\rangle$  по проекции полного магнитного момента  $m_F$ , и расщепление между магнитными подуровнями в слабых магнитных полях может быть определено формулой эффекта Зеемана [26]:

$$\Delta E_z = \mu_B g_F m_F B. \quad (2.8)$$



Здесь  $B$  – величина магнитного поля,  $\mu_B$  – магнетон Бора, а факторы Ланде  $g_J$  и  $g_F$  могут быть найдены как

$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)}, \quad (2.9)$$

$$g_F = g_J \frac{F(F+1) - I(I+1) + J(J+1)}{2F(F+1)}. \quad (2.10)$$

Также для улучшения характеристик стандарта необходимо учитывать уширение линии часового перехода за счет квадратичного зеемановского сдвига [30]. В таком случае величина сверхтонкого расщепления между компонентами  $^2S_{1/2} |F=0\rangle$  и  $^2S_{1/2} |F=1\rangle$  с проекциями магнитного момента  $m_F = 0$  окажется равной

$$\Delta E_{\text{HF}} = 12.6428 + \delta_{2z} \text{ ГГц}, \quad (2.11)$$

где поправку  $\delta_{2z}$  можно найти как

$$\delta_{2z} = (310.8)B^2 \text{ Гц} \quad (2.12)$$

для магнитного поля, измеряемого в Гауссах.

## 2.2. Лазерное охлаждение ионов $^{171}\text{Yb}^+$

Первым этапом подготовки захваченного ионного ансамбля является доплеровское охлаждение, которое осуществляется на переходе  $^2S_{1/2} |F=1\rangle \leftrightarrow ^2P_{1/2} |F=0\rangle$  (см. Рис. 2.1, переход  $^2S_{1/2} |F=0\rangle \leftrightarrow ^2P_{1/2} |F=0\rangle$  запрещен правилами отбора) на длине волны 369.53 нм с небольшой отстройкой в красную сторону спектра  $\approx 10$  МГц, равной половине ширины линии перехода для обеспечения эффективного охлаждения согласно (1.93). Сфокусированный в центр ловушки лазерный пучок имеет ширину перетяжки  $\sim 180$  мкм и мощность около 200 мкВт, что составляет порядка 60% мощности насыщения и позволяет пренебречь уширением мощностью линии охлаждающего перехода. Данный процесс является почти циклическим.

С вероятностью 99.5% верхнее состояние  $^2P_{1/2}$  распадается в состояние  $^2S_{1/2}$ . В оставшихся 0.05% случаев ион переходит в метастабильное долгоживущее (52.7 мс) состояние  $^2D_{3/2}$ . Для предотвращения накачки данного состояния и прерывания тем самым цикла охлаждения используется лазер перекачки на длине волны 935.2 нм, который переводит ион из долгоживущего состояния  $^2D_{3/2}$  в короткоживущее (37.7 нс) состояние  $^3D[3/2]_{1/2}$ . Затем ион распадается в прежнее состояние  $^2S_{1/2}$ , возвращаясь в цикл охлаждения.

Также в процессе охлаждения ион может оказаться в состоянии  $^2S_{1/2} |F=0\rangle$ . Чтобы предотвратить это во время циклов охлаждения, охлаждающее излучение на длине волны 369.53 нм пропускается через резонансный ЭОМ, моделирующий на частоте 14.7 ГГц.

Результирующая положительная боковая полоса резонансна с переходом  ${}^2S_{1/2} |F = 0\rangle \leftrightarrow {}^2P_{1/2} |F = 1\rangle$ , который возвращает ион в цикл охлаждения.

### 2.3. Накачка основного состояния

В рассматриваемом микроволновом стандарте частоты часовым переходом является переход  ${}^2S_{1/2} |F = 0\rangle \rightarrow {}^2S_{1/2} |F = 1\rangle$ . Таким образом, последующим этапом в алгоритме работы является оптическая накачка состояния  ${}^2S_{1/2} |F = 0, m_F = 0\rangle$ , обозначенного на Рис. 2.2 как  $|0\rangle$ . Для инициализации данного состояния охлаждающее лазерное излучение на длине волны 369.53 нм модулируется резонансным ЭОМ на частоте 2.1 ГГц, возбуждая тем самым положительной боковой частотой переход  ${}^2S_{1/2} |F = 1\rangle \rightarrow {}^2P_{1/2} |F = 1\rangle$ . Из состояния  ${}^2P_{1/2} |F = 1\rangle$  ион распадается в состояние  $|0\rangle$ , однако также может оказаться в состоянии  ${}^2D_{3/2} |F = 2\rangle$ . Поэтому для эффективной инициализации состояния  $|0\rangle$  необходимо также модулировать перекачивающее излучение на длине волны 935.2 для получения боковой частоты 3.06 ГГц.

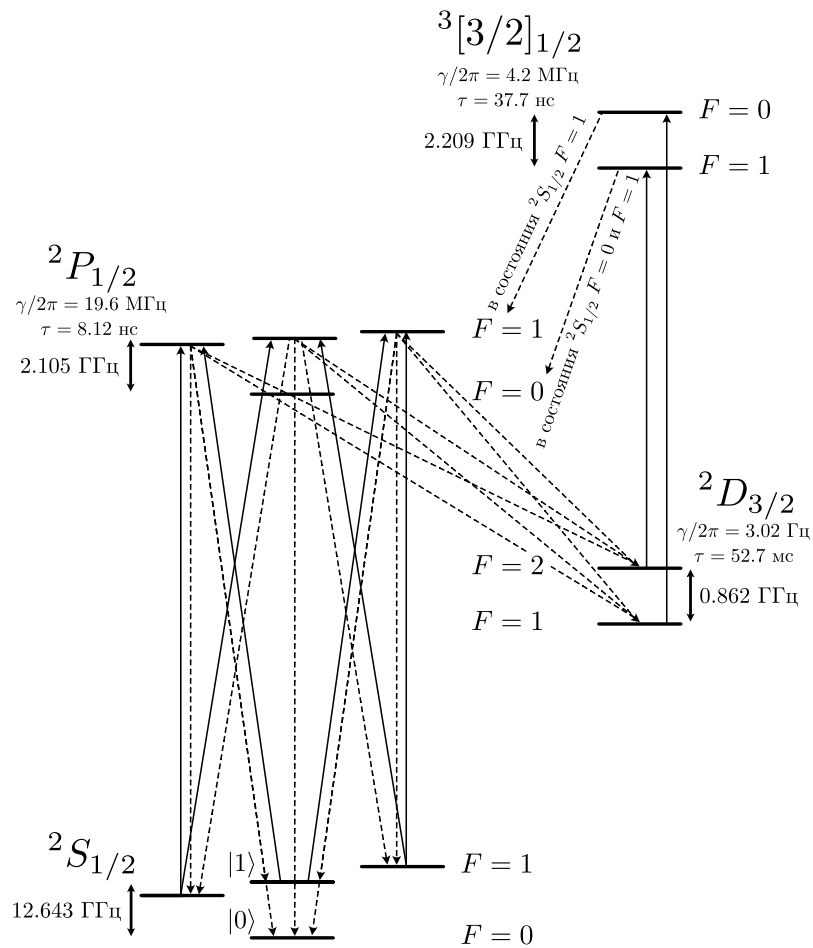


Рис. 2.2. Схема инициализации основного состояния.

Так, например, используя около 50 мкВт излучения на длине волны 369.53 нм с перетяжкой пучка в центре ловушки  $\sim 30$  мкм можно добиться накачки состояния  $|0\rangle$  в случае одиночного иона менее чем за 500 нс [31].

## 2.4. Возбуждение часового перехода

Как уже отмечалось ранее, особенностью создаваемого нами стандарта является использование мультипольной ловушки для улучшения систематики, связанной с эффектом Доплера второго порядка. Таким образом, предварительное лазерное охлаждение и описанная выше инициализация основного состояния осуществляются в квадрупольной ловушке, а для возбуждения часового перехода необходима перегрузка ионного облака в мультипольную секцию, процедура чего более подробно описана в разделе 3.4. Часовой переход возбуждается непосредственно радиочастотным излучением на частоте 12.643 ГГц с учетом уширений за счет наличия внешних магнитных полей. Для этих целей планируется использовать расположенный снаружи вакуумной камеры волновод. Поскольку в начальный момент вся населенность находится в в невозбужденном состоянии, то при воздействии на ион микроволнового излучения амплитуды вероятности  $c_0(t)$  и  $c_1(t)$  состояний  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$  соответственно будут изменяться во времени следующим образом [32]:

$$c_0(t) = \left[ \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - \frac{i\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] e^{i\Delta t/2}, \quad (2.13)$$

$$c_1(t) = \frac{i\Omega_R}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) e^{-i\Delta t/2}. \quad (2.14)$$

Таким образом, под действием электромагнитной волны первоначально невозбужденные ионы начинают переходить в возбужденное состояние с вероятностью, медленно осциллирующей с частотой Раби  $\Omega = \sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}$  ( $\Omega_R = |V_{01}|/\hbar$  – резонансная частота Раби). Максимальная амплитуда таких осцилляций достигает единицы при совпадении частоты Раби  $\Omega$  с резонансной  $\Omega_R$ , т.е. при величине отстройки, равной нулю ( $\Delta = 0$ ). Выражения (2.13) и (2.14) являются общими для любых типов переходов, от которых зависит только частота Раби  $\Omega_R$ , определяемая матричным элементом возмущения  $V_{01}$ .

## 2.5. Детектирование возбужденного состояния

После возбуждения часового перехода ионы вновь перегружаются в квадрупольную ловушку для детектирования доли возбужденных ионов. Для этого достаточно использовать лишь охлаждающий пучок и лазер перекачки без каких-либо модуляций (см. Рис. 2.3). В

таком случае ионы будут циклически переходить из состояния  $|1\rangle$  в состояние  ${}^2P_{1/2} |F = 0\rangle$ , откуда затем распадутся обратно в состояние  $|1\rangle$ . Продолжение цикла регистрации в случае перехода иона из состояния  ${}^2P_{1/2} |F = 0\rangle$  в темное состояние  ${}^2D_{3/2} |F = 1\rangle$  вновь обеспечивает лазер перекачки на уровень  ${}^3[3/2]_{1/2} |F = 0\rangle$ , за счет чего ионы впоследствии снова оказываются в изначальном состоянии  $|1\rangle$ . При этом в силу правил отбора не допускается накачка состояния  $|0\rangle$ . Таким образом, спонтанно излучать при замкнутом цикле детектирования будут лишь те ионы, которые оказались в возбужденном состоянии  $|1\rangle$ . Число возбужденных ионов, пропорциональное сигналу люминесценции, в зависимости от знака первоначальной отстройки микроволнового излучения от центральной частоты часового перехода может быть использовано для генерации сигнала ошибки, необходимого для подстройки частоты генератора. Затем процедура опроса часового перехода многократно повторяется.

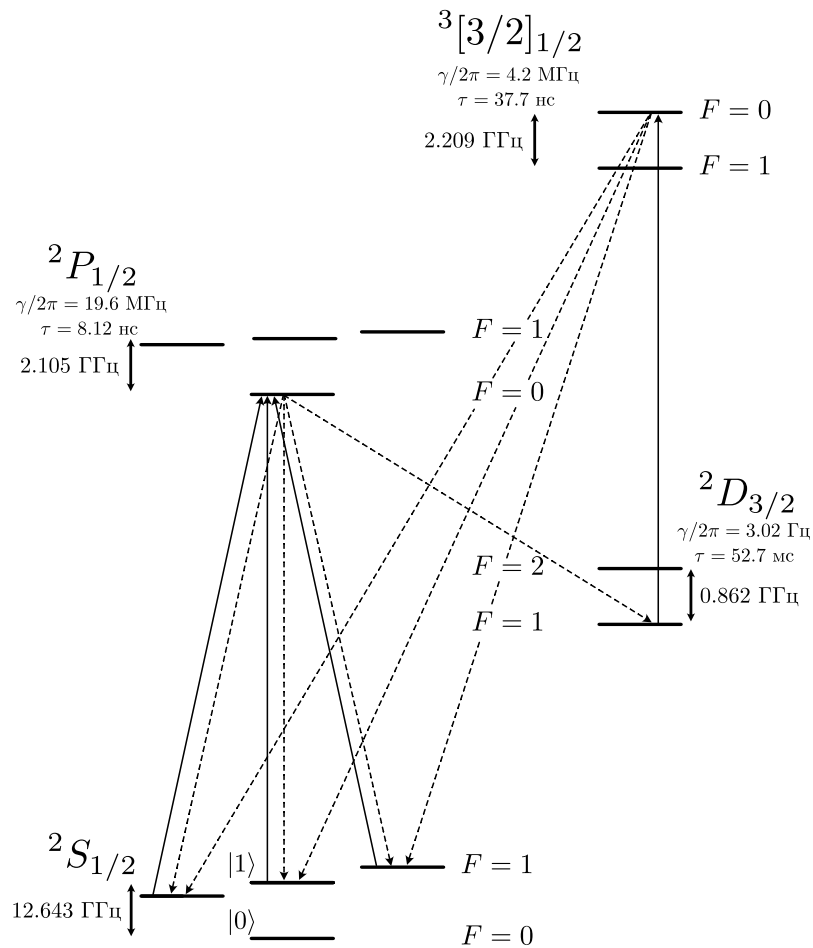


Рис. 2.3. Схема регистрации доли возбужденных ионов.

## Эксперименты и численные расчеты

### 3.1. Экспериментальная установка

#### 3.1.1. Вакуумная камера и ловушка Пауля

Для удержания частиц при создании микроволнового стандарта частоты, основанного на ионах  $^{199}\text{Hg}^+$ , будет использоваться линейная комбинированная ловушка Пауля (см. Рис. 3.1), состоящая из двух секций: квадрупольной и мультипольной. Ловушки представляют собой системы из 4-х титановых и 16-ти молибденовых цилиндрических электродов радиусами  $r_q = 2$  мм и  $r_m = 0.8$  мм, расположенных таким образом, что расстояние от их поверхности до оси ловушек составляет  $r_0 = 5.6$  мм. Обе ловушки являются соосными, а для аксиального удержания и перегрузки ионов между секциями используются удерживающие электроды, выполненные в форме толстых колец. Вся конструкция расположена в титановой вакуумной камере при давлении  $6 - 8 \times 10^{-9}$  мбар.

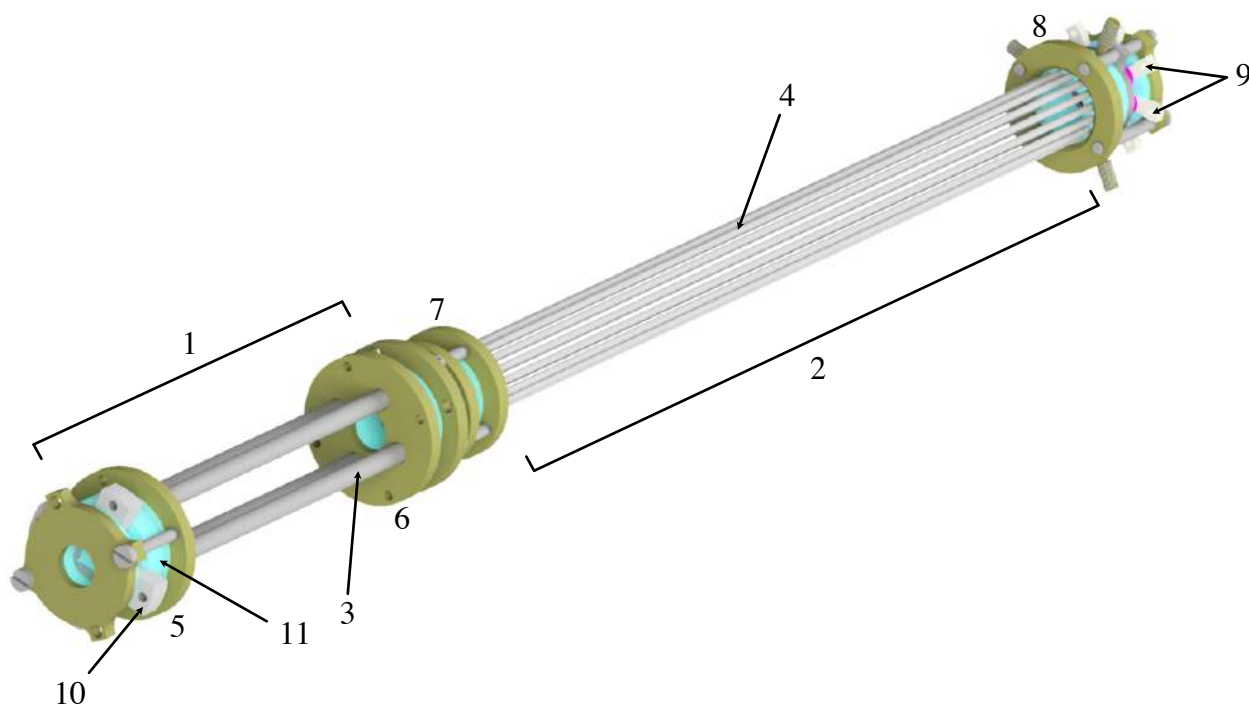


Рис. 3.1. Модель комбинированной линейной ловушки Пауля. Цифрами соответственно обозначены: **1, 2** – квадрупольная и мультипольная секции; **3** – один из 4-х электродов квадрупольной ловушки; **4** – один из 16-ти электродов мультипольной ловушки; **5, 6 и 7, 8** – удерживающие электроды квадрупольной и мультипольной секций; **9, 10** – независимые выходы радиочастотных электродов; **11** – изолятор.

Для получения пучка нейтральных частиц используется атомный испаритель, представляющий собой резистивно нагреваемую стальную трубку, в которую помещается металлический иттербий. Атомная печь расположена вдоль аксиального направления вакуумной камеры.

По причине крайне плотного расположения электродов в мультипольной секции оптический доступ к ионам в ней ограничен, и для этих целей используется квадрупольная секция. Для непосредственного наблюдения частиц излучение собирается при помощи высокоапертурного объектива на матрице CMOS-камеры, а при необходимости детектирования сигнала люминесценции оно может быть перенаправлено на фотоэлектронный умножитель с помощью подвижного зеркала.

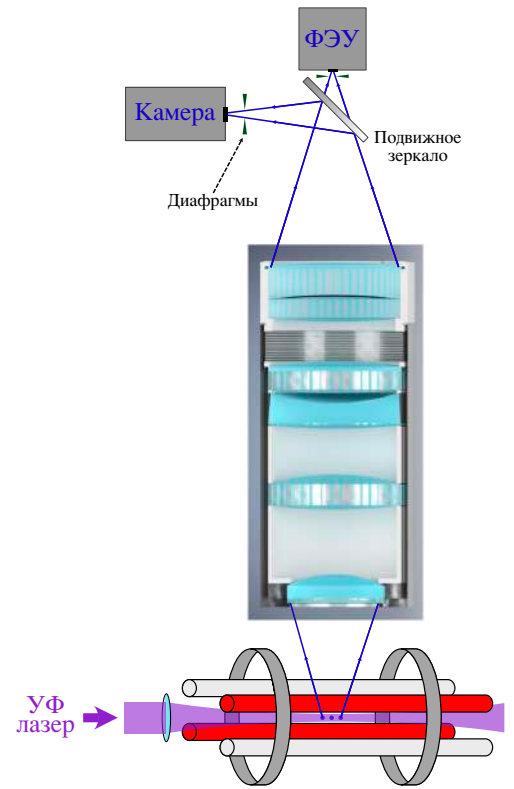


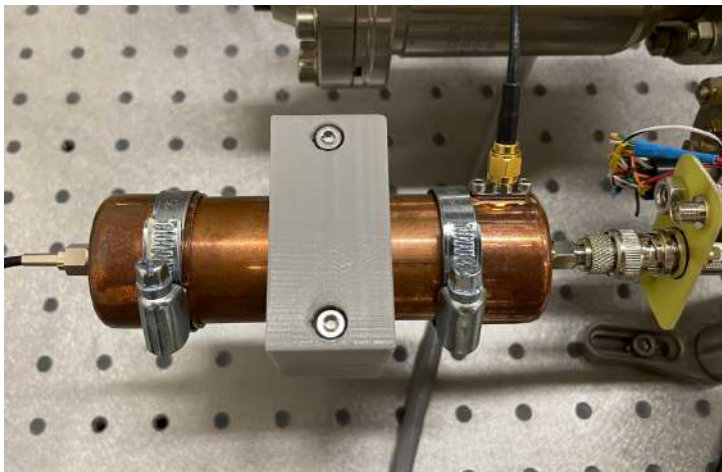
Рис. 3.2. Схема системы детектирования сигнала люминесценции.

### 3.1.2. Питание ловушки

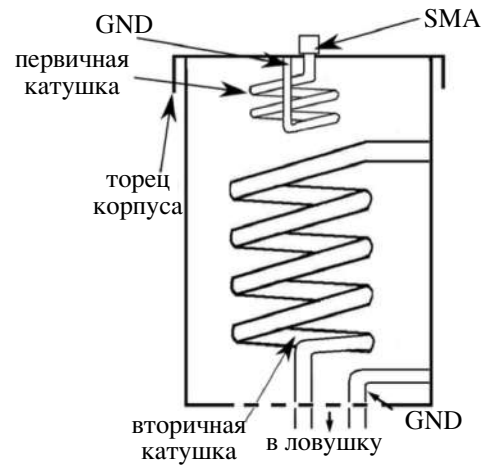
Важнейшим параметром установки является питание ловушки. Для этого на электроды подается напряжение с частотой  $\omega \sim 2\pi \times 10^6$  Гц и амплитудой порядка 300 В. Поскольку используемые радиочастотные компоненты обычно согласуются на импеданс 50 Ом, необходимая мощность усилителя в таком случае окажется равной

$$P = \frac{U^2}{2R} = 900 \text{ Вт}, \quad (3.1)$$

что говорит о нерациональности создания подобного устройства. Поэтому для обеспечения такой амплитуды используется резонансный трансформатор, принципиальная схема которого изображена на Рис. 3.3 (б). Для питания нашей двухсекционной ловушки были рассчитаны и реализованы два резонансных трансформатора, представляющие собой две обмотки с изменяемой взаимной индуктивностью с целью согласования импеданса источника с емкостной нагрузкой электродов (см. Рис. 3.3 (а)). Отличие нашей конструкции от изображенной на Рис. 3.3 (б) заключается в куда большем числе витков вторичной катушки ( $\sim 140$  для квадрупольной ловушки и  $\sim 80$  для мультипольной), а также в использовании ферритового материала (150НВ). Это в первую очередь связано с ограничением на линейные размеры трансформатора для используемых нами частот.



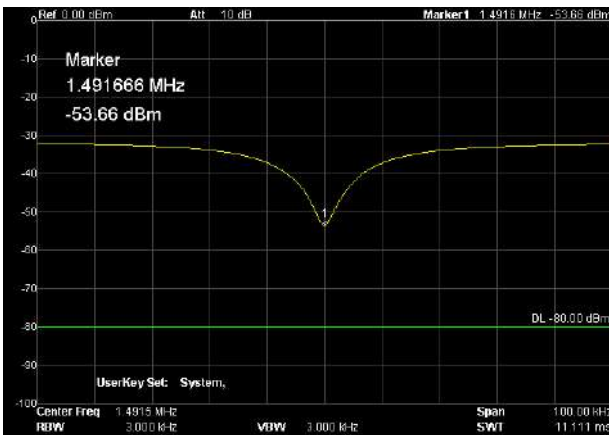
(a)



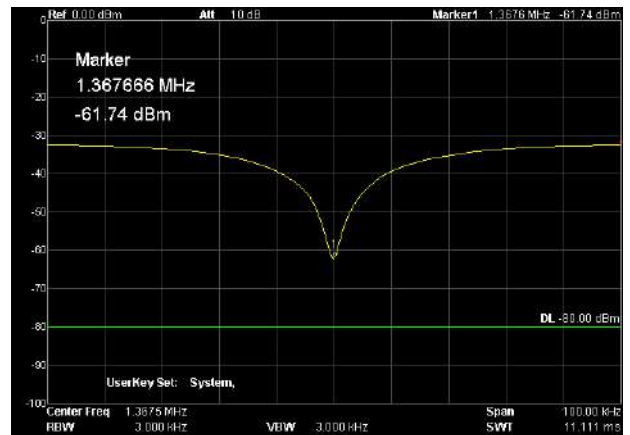
(б)

Рис. 3.3. (a) – фотография резонансного трансформатора, подключенного ко входу мультипольной ловушки; (б) – общая схема устройства резонансного трансформатора.

Путем наблюдения максимума отраженного от ловушек радиочастотного сигнала были приблизительно найдены резонансы трансформаторов для квадрупольной и мультипольной ловушек (см. Рис. 3.4), которые после окончательного подключения и оптимизации составили 1.485 и 1.390 МГц соответственно.



(a)



(б)

Рис. 3.4. Резонансный провал отраженного от ловушек сигнала квадрупольного (a) и мультипольного (б) трансформаторов.

### 3.1.3. Численное моделирование полей ловушек

Для определения потенциала, создаваемого в обеих ловушках, было проведено численное моделирование электрических полей электродов. Для этого напряжение электродов



чередовалось по кругу: один электрод заземлялся, а на последующий подавалось напряжение +1 В. Результаты расчётов приведены на Рис. 3.5. Также на Рис. 3.6 изображено сравнение аппроксимации численных результатов с идеальными квадрупольным и мультипольным потенциалами.

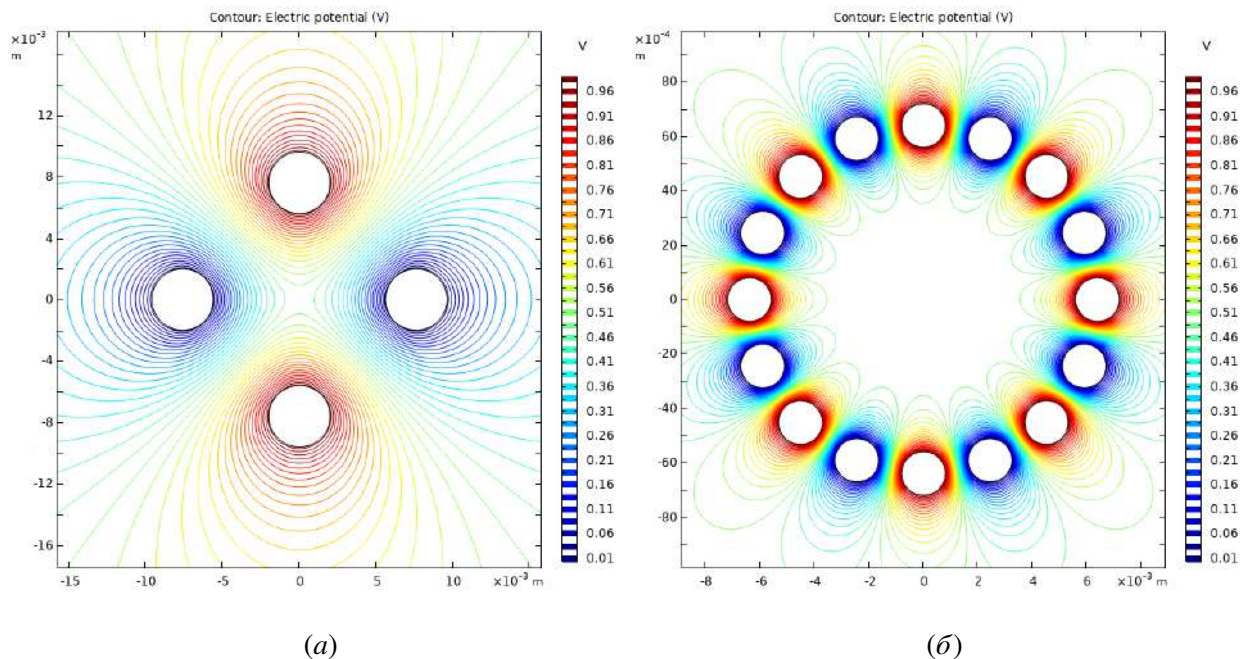


Рис. 3.5. Результаты численного моделирования потенциалов квадрупольной (а) и мультипольной (б) ловушек в плоскости  $xу$ .

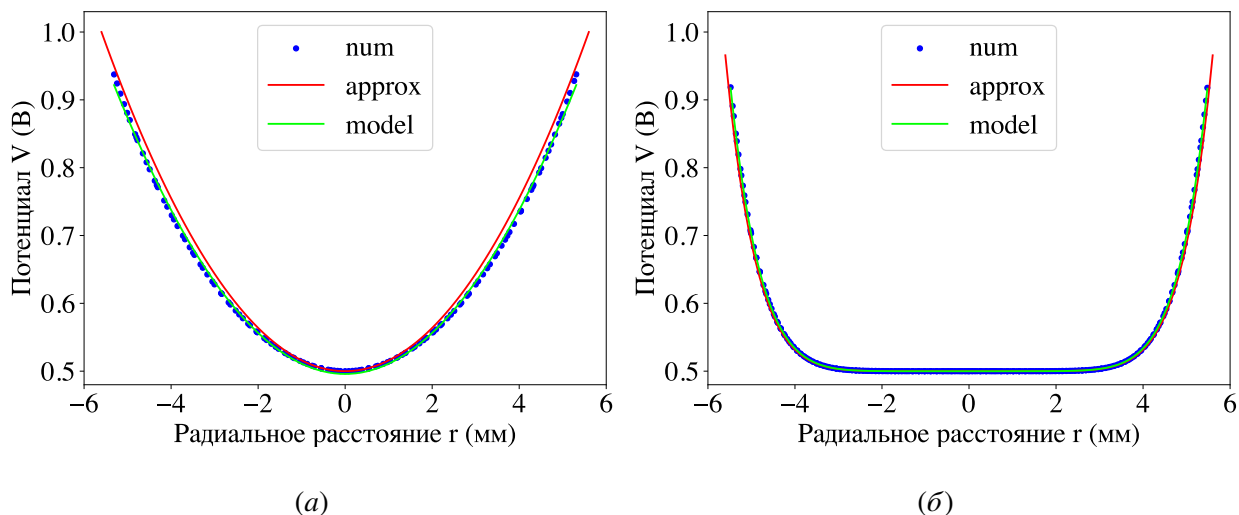


Рис. 3.6. Сравнение электрического потенциала вдоль оси  $x$ : (а) – в квадрупольной ловушке, (б) – в мультипольной. Синие точки соответствуют численным значения, зеленая кривая – аппроксимация полиномами 2–й и 14–й степени соответственно, красная кривая – идеальный квадрупольный и мультипольный потенциал.



Аналогичным образом было произведено моделирование потенциала вдоль оси  $z$  для мультипольной ловушки. Для этого была построена точная трехмерная модель удерживающих электродов, на которые подавалось напряжение +200 В. Полученный потенциал довольно точно аппроксимируется функцией вида:

$$U(z) = a \left( \frac{z}{z_0} \right)^{12}, \quad (3.2)$$

как показано на Рис. 3.7 вместе с численными результатами.

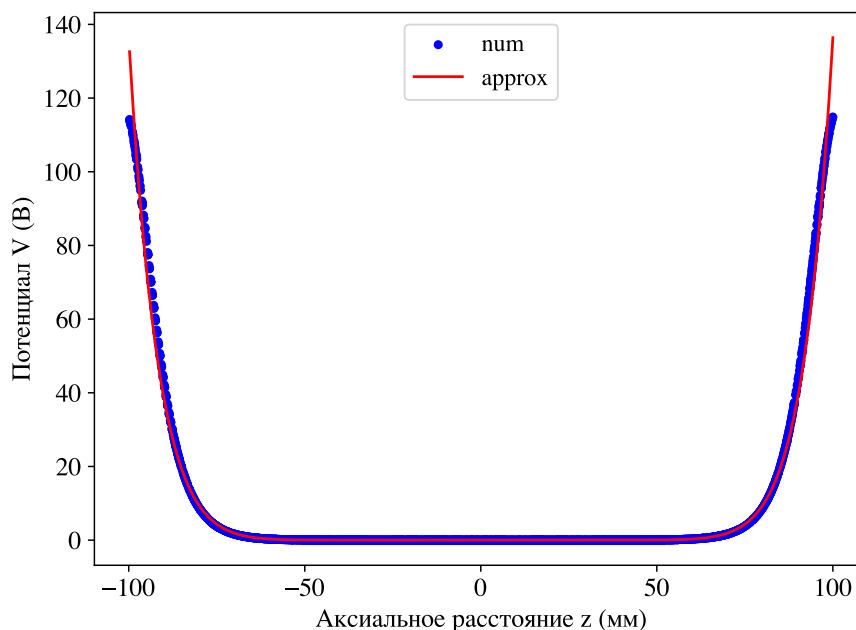


Рис. 3.7. Аппроксимация удерживающего потенциала.

### 3.1.4. Источник РЧ излучения для возбуждения часового перехода

Для переноса электромагнитного излучения к ионному облаку при возбуждении часового перехода используется микроволновый волновод прямоугольного сечения с рупором на конце. Однако встает вопрос о возможном экранировании внутренней области ловушки за счет очень плотного расположения мультипольных электродов. Чтобы определить эффективность проникновения радиочастотного поля в область удержания ловушки была построена трехмерная модель предполагаемого рупора, и исследована зависимость величины электрического поля электромагнитной волны внутри ловушки от взаимного расположения ее поляризации и электродов. Результаты изображены на Рис. 3.8. Как видно, для проникновения РЧ поля в область удержания необходимо, чтобы поляризация ЭМ волны была перпендикулярна оси ловушки.

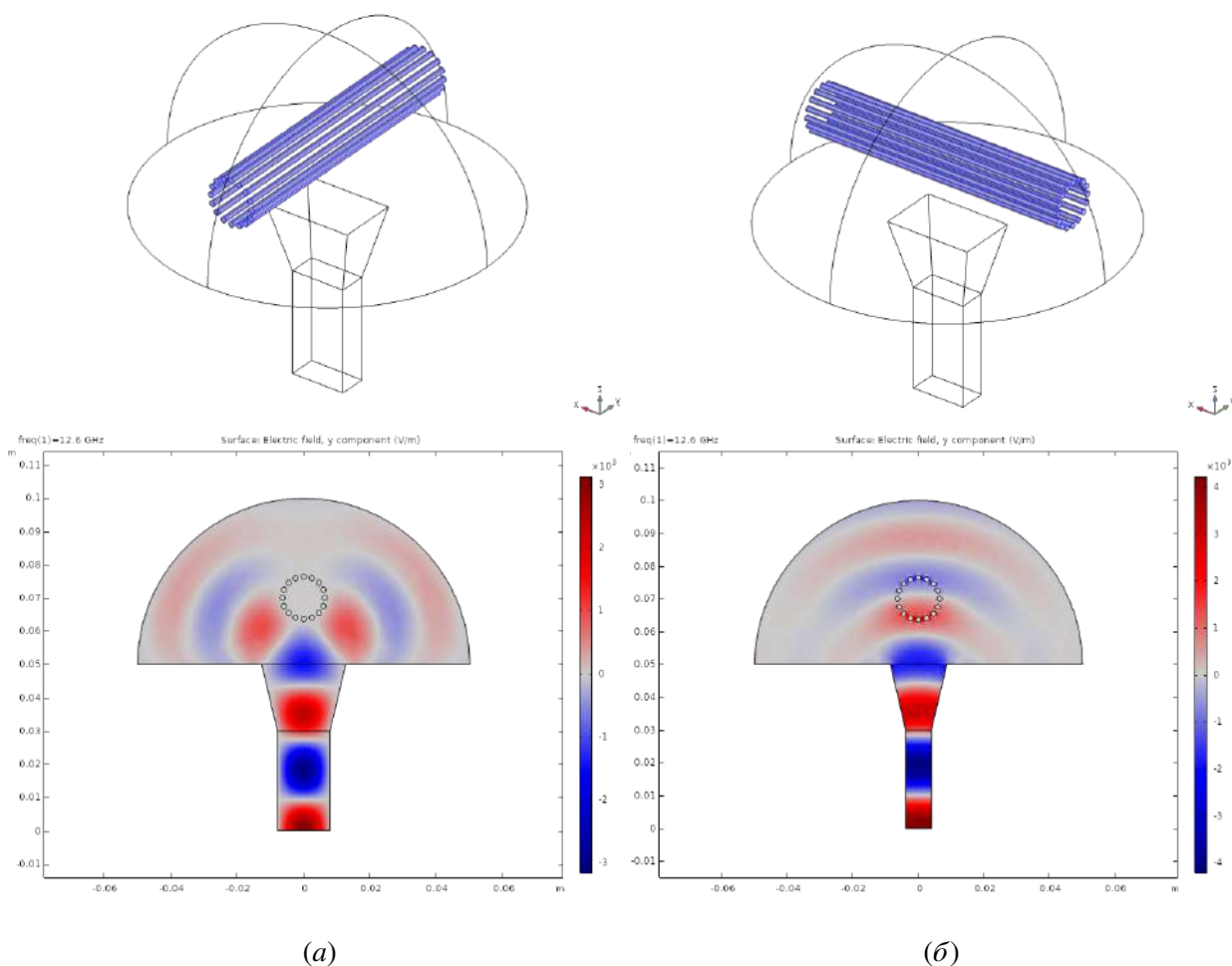


Рис. 3.8. Результаты численного моделирования распространения РЧ поля при различном направлении поляризации ЭМ волны: (а) – вдоль оси ловушки, (б) – поперек.

### 3.1.5. Лазерная система для охлаждения $^{174}\text{Yb}^+$

Поскольку для лазерного охлаждения изотопа  $^{171}\text{Yb}^+$  требуются перекачивать ион из обеих подуровней сверхтонкого расщепления, на первом этапе эксперимента производится охлаждения ионов  $^{174}\text{Yb}^+$ , не имеющих сверхтонкой структуры. Это сильно облегчает состав лазерной системы, не включающий в этом случае электрооптические модуляторы. Для ионизации нейтрального иттербия  $^{174}\text{Yb}$  и последующего лазерного охлаждения требуется наличие трех лазерных пучков: ионизирующего, охлаждающего и перекачивающего. В качестве охлаждающего и фотоионизирующего лазеров используются диодные лазеры с внешним резонатором, а лазер перекачки представляет собой полупроводниковый лазер с распределенной обратной связью. Схема лазерной установки изображена на Рис. 3.9. Все три лазера стабилизируются с помощью PID привязки по волномеру. Лазерный пучок фотоионизации на длине волны 399 нм и лазер охлаждения на длине волны 369.5 нм однократно сбиваются на полупрозрачном зеркале и фокусируются в перетяжку порядка 180 мкм в центре квадр-

польной ловушки с помощью длиннофокусной линзы  $f = 250$  мм. Лазер перекачки на длине волны 935.2 нм фокусируется линзой  $f = 500$  мм в перетяжку порядка 300 мкм, а затем сбивается с двумя оставшимися пучками на втором полупрозрачном зеркале. Это сделано для того, чтобы обеспечить юстировкой лишь последних двух металлических зеркал одновременное изменение положения в ловушке всех пучков для нахождения области удержания ловушки.

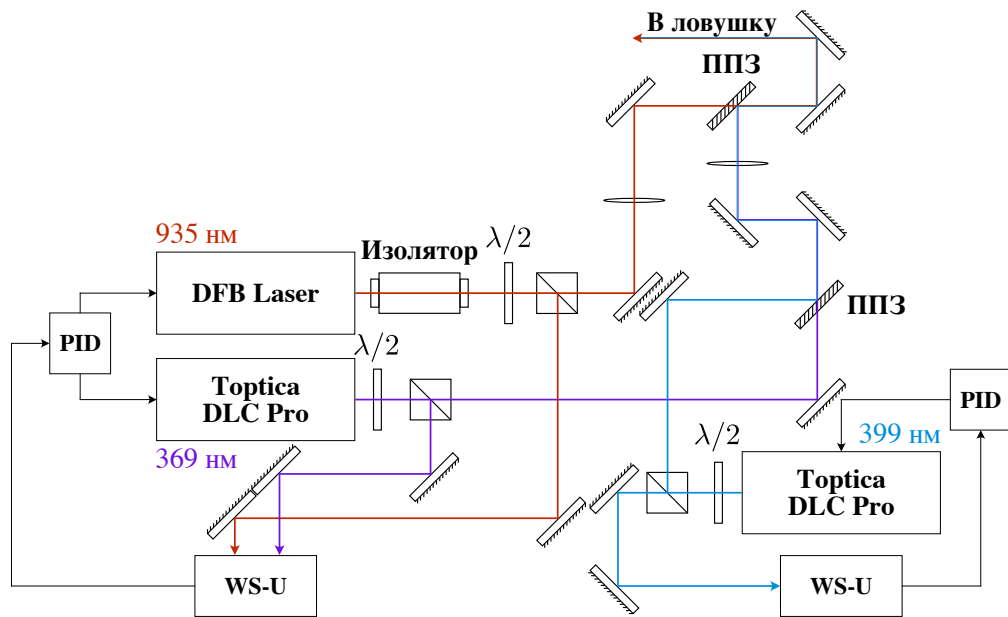


Рис. 3.9. Схема лазерной системы для охлаждения  $^{174}\text{Yb}^+$ : **WS-U** – оптический измеритель длины волны, **PID** – пропорционально–интегрально–дифференцирующий (ПИД) регулятор, **ППЗ** – полупрозрачное зеркало.

### 3.2. Эксперимент по охлаждению $^{174}\text{Yb}^+$

Ионизация нейтрального иттербия осуществляется в два этапа: сначала атом возбуждается лазером фотоионизации на длине волны 399 нм в состояние  $^1P_1$ , а затем происходит отрыв электрона с помощью охлаждающего лазера на длине волны 369.5 нм.

Первым этапом эксперимента является захват ионов. Для этого на электроды квадрупольной ловушки подается радиочастотное напряжение с пиковой амплитудой 250 В и включаются все лазерные пучки (охлаждающий лазер отстраивается на 10 МГц в красную область спектра). Ловушка запирается ограничивающим напряжением удерживающих электродов, равным 200 В, и на атомную печь подается электрический ток порядка 6 А. Загрузка атомов может продолжаться не дольше, чем до достижения внутрикамерным давлением значения

$5 - 6 \times 10^{-8}$  мбар, чтобы избежать перегрева испарителя, а также сильного ухудшения степени вакуума. Затем ионизирующий лазер отключается, чтобы избавиться от лишних засветок в области несовпадения лазерных пучков.

После захвата ионов в ловушку и их предварительного охлаждения облако кристаллизуется путем постепенного уменьшения отстройки охлаждающего лазера по мере уменьшения температуры ионов. Однако поскольку скорости ионов имеют максвелловское распределение, то в случае чрезмерного приближения частоты охлаждающего излучения к резонансу ионы могут начать нагреваться. На Рис. 3.10 изображены захваченные и кристаллизованные ионы  $^{174}\text{Yb}^+$ . При медленной загрузке (малом токе атомной печи) удалось также захватить и кристаллизовать одномерную цепочку из примерно 30-ти ионов.

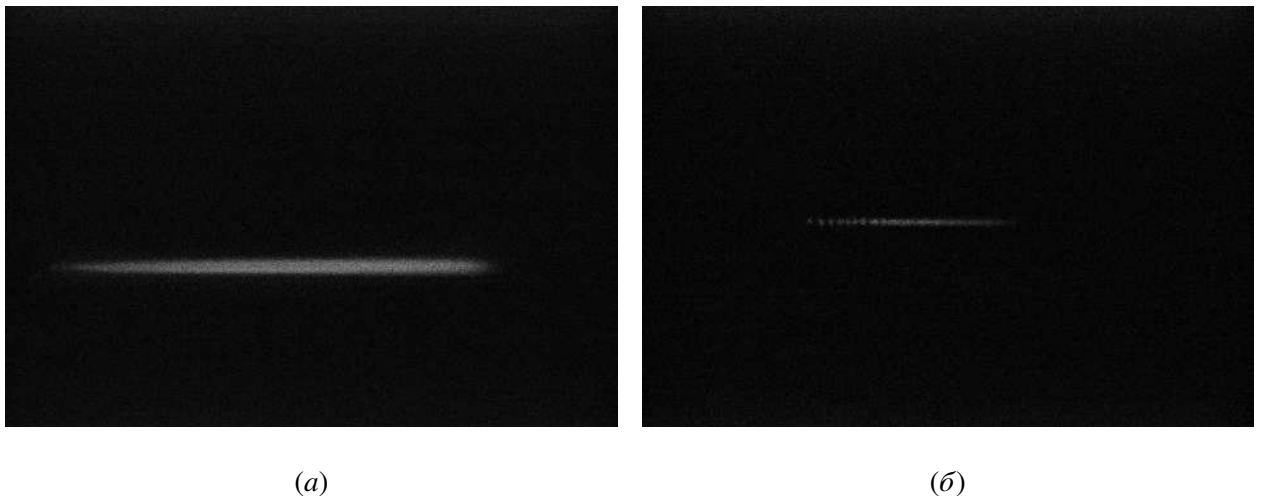


Рис. 3.10. Изображение лазерно охлажденного ионного облака (а) и одномерной цепочки (б) ионов  $^{174}\text{Yb}^+$ , захваченных в квадрупольную ловушку Пауля.

### 3.3. Численное моделирование распределения плотности ионного облака в мультипольной ловушке

Вернемся теперь к уравнению (1.69), которое будем решать методом Рунге–Кутты численно. Чтобы наглядно показать преимущество мультипольной ловушки в сравнении с квадрупольной, рассмотрим по аналогии с [20] ионы ртути  $^{199}\text{Hg}^+$  при температуре 700 К. Решение уравнения (1.69) изображено на Рис. 3.11. Данное распределение плотности соответствует  $1.5 \times 10^7$  ионам в 12-польной ловушке, на которую подано пиковое напряжение 70 В на частоте 1 МГц. Как видно, при фиксированном числе ионов их плотность в квадрупольной ловушке значительно превышает плотность в мультипольной, которая спадает к центру ловушки. Это обусловлено тем, что ближе к оси удержания кулоновское отталкивание ионов

в мультипольной ловушке превосходит удерживающую силу со стороны радиочастотного поля.

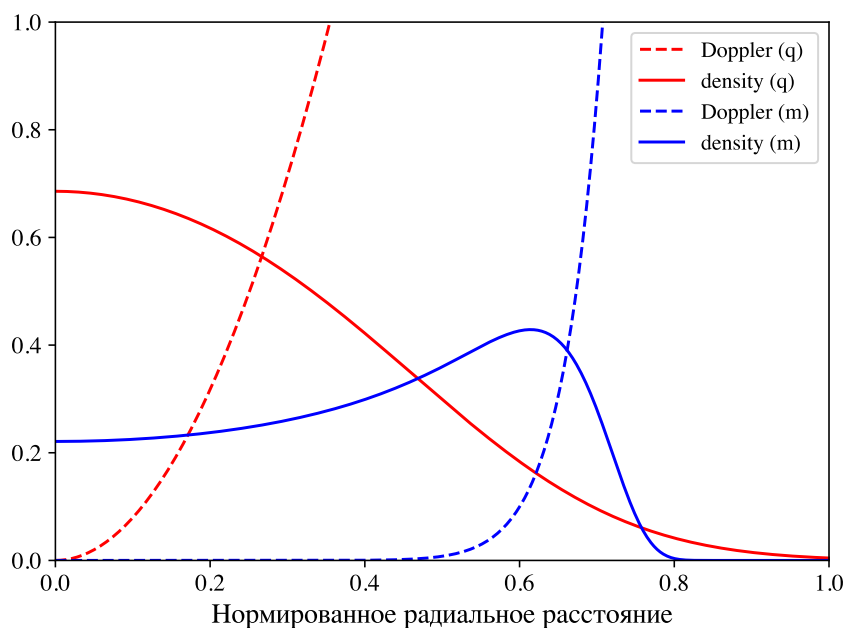


Рис. 3.11. Сплошными линиями обозначена нормированная на величину  $n_0$  радиальная плотность ионов  $^{199}\text{Hg}^+$  в квадрупольной (красный) и мультипольной (синий) ловушках. Пунктирным линиям соответственно отвечает эффект Доплера второго порядка.

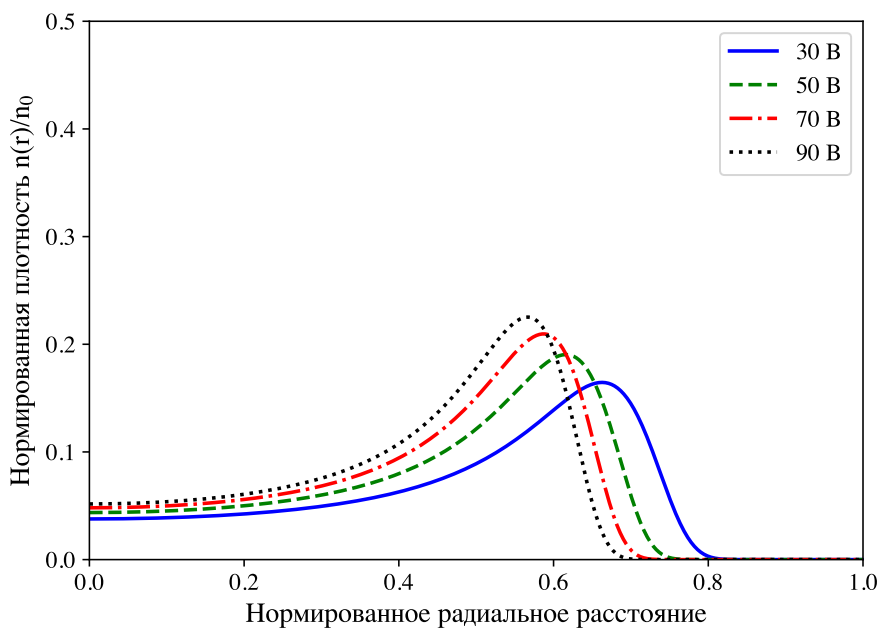


Рис. 3.12. Радиальная плотность ионов  $^{171}\text{Yb}^+$  при температуре  $T = 300\text{ K}$  в мультипольной ловушке для различных значений амплитуды радиочастотного поля.

На Рис. 3.11 также отложен нормированный эффект Доплера второго порядка, обусловленный радиальными микродвижениями, величина которого дается соотношением

$$-\frac{\left\langle \frac{v^2}{2c^2} \right\rangle}{\frac{k_B T}{mc^2}} = \frac{k^2 m \omega^2 r_0^2}{8 k_B T} \hat{r}^{2k-2} \equiv F_d^k. \quad (3.3)$$

Возвращаясь к параметрам нашей установки, рассмотрим радиальную плотность при разных значениях амплитуды радиочастотного поля и фиксированном числе ионов, равном  $1.5 \times 10^7$ . Результаты приведены на Рис. 3.12. Данный диапазон напряжений выбран не случайно, поскольку в таком случае характерный параметр (1.60) принимает значения в диапазоне  $\eta(\hat{r} \leq 0.71) \leq 0.3$ , что согласно [21] гарантирует выполнение условия адиабатичности.

Наконец, мы можем вычислить полный вклад связанного с микродвижениями квадратичного эффекта Доплера, усредненного по всему ионному облаку как

$$N_d^k = \frac{\int n(r) r F_d^k(r) dr}{\int n(r) r dr}. \quad (3.4)$$

С помощью данного выражения определим полный доплеровский сдвиг частоты для захваченных ионов с профилем плотности  $n(r)$ :

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{3k_B T}{2mc^2} \left( 1 + \frac{2}{3} N_d^k \right). \quad (3.5)$$

Данная величина теперь может быть численно получена для ловушки произвольной мультипольности с заданными числом ионов на единицу длины и температурой.

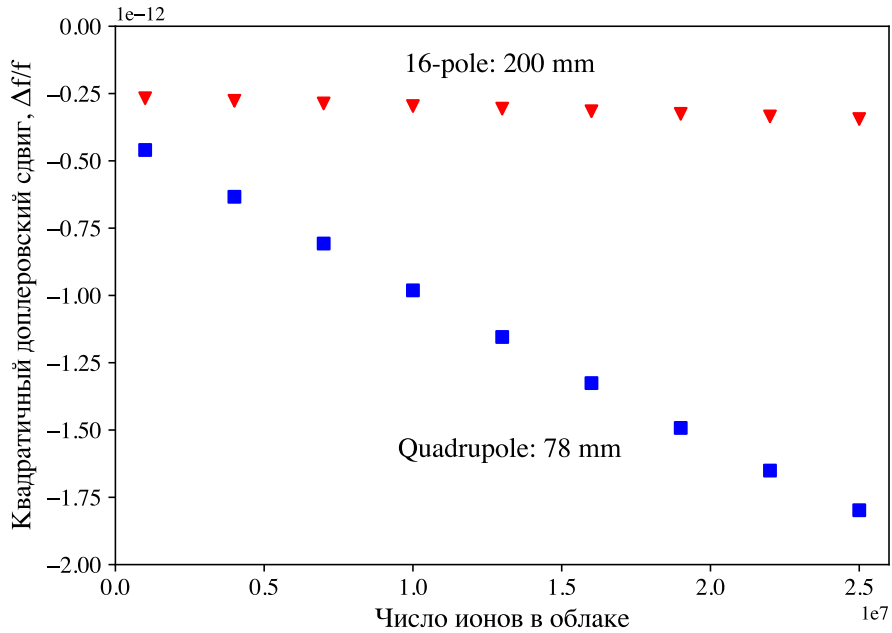


Рис. 3.13. Зависимость величины относительного квадратичного доплеровского сдвига от числа захваченных ионов в двух ловушках: мультипольной (красный) и квадрупольной (синий).

Так, например, на Рис. 3.13 можно видеть сравнение изменений относительного сдвига частоты, вызванного эффектом Доплера второго порядка, в обеих ловушках, используемых в нашем эксперименте. Температура ионов в обоих случаях составляет 300 К и остается постоянной по мере изменения числа частиц. Важным наблюдением здесь является тот факт, что рост абсолютной величины квадратичного доплеровского сдвига с увеличением числа ионов в квадрупольной ловушке более чем в 17 раз превышает его рост в мультипольной. Помимо меньшей радиальной плотности облака в мультипольной ловушке этот эффект также достигается за счет ее большей длины в сравнении с квадрупольной при том же значении внутреннего радиуса.

### 3.4. Межсекционная перегрузка

Как это отмечалось ранее, использование мультипольной ловушки позволяет снизить темпы РЧ нагревов ионов, а также уменьшить эффект Доплера второго порядка во время возбуждения часового перехода, что улучшает характеристики стандарта. Однако плотная компоновка электродов мультипольной секции сильно ограничивает оптический доступ к ионам. По этой причине возникает необходимость перегрузки ионного облака между мультипольной и квадрупольной ловушками для последовательного возбуждения и детектирования состояний в соответствующих секциях. Данная процедура будет осуществляться в несколько этапов, которые мы более подробно обсудим ниже.

**Загрузка ионов.** Первым этапом является захват и лазерное охлаждение ионного облака в квадрупольной ловушке, который подробно описан в разделе 3.2.

**Перегрузка в мультиполь.** Затем осуществляется перегрузка ионного облака в мультипольную секцию. Для этого в квадрупольной секции снимается напряжение с дальнего удерживающего электрода (**Q2**) при включенном ближнем (**Q1**), а в мультипольной секции включается дальний удерживающий электрод (**M2**). Таким образом, на ионное облако, изначально находившееся в центре квадрупольной ловушки, начинает действовать нескомпенсированная ускоряющая сила со стороны электрода **Q1**. После того как ионное облако достигнет потенциала электрода **M2** и, отразившись от него, окажется в центре мультипольной ловушки, подается напряжение на ближний запирающий электрод мультипольной секции (**M1**), и облако может быть эффективно лазерно охлаждено для возбуждения часового перехода.

**Перегрузка в квадруполь.** Аналогично, для перегрузки в квадрупольную секцию снимается напряжение с электрода **M1** при включенном электроде **M2**. Однако дальний теперь электрод **Q1** на время отключается. Это связано с тем, что потенциал квадрупольной секции в окрестности ее центра существенно отличен от нуля по сравнению с мультипольной. Этот фактор в совокупности с малой скоростью ионов при вылете из мультипольной ловушки за счет слабого ускоряющего поля может помешать ионному облаку полностью оказаться в квадрупольной секции и привести к частичной потере ионов в случае, если электрод **Q1** будет все время включен. Поэтому квадрупольные удерживающие электроды остаются выключенными до тех пор, пока облако не пролетит центр квадрупольной ловушки, чтобы уменьшить вероятность потери ионов. Затем квадрупольная секция полностью запирается электродами **Q1** и **Q2**, и облако вновь охлаждается. Затем процедура может быть проделана снова.

На Рис. 3.14 продемонстрирована временная зависимость координаты ионного облака при перегрузке между секциями. Расчеты произведены с учетом моделированных полей ловушек, а также параметров охлаждающего пучка. Для управления напряжением удерживающих электродов в течение изображенных промежутков времени используется восьмиканальный цифро–аналоговый преобразователь QMS45 с частотой преобразования на канал равной 125 кГц.

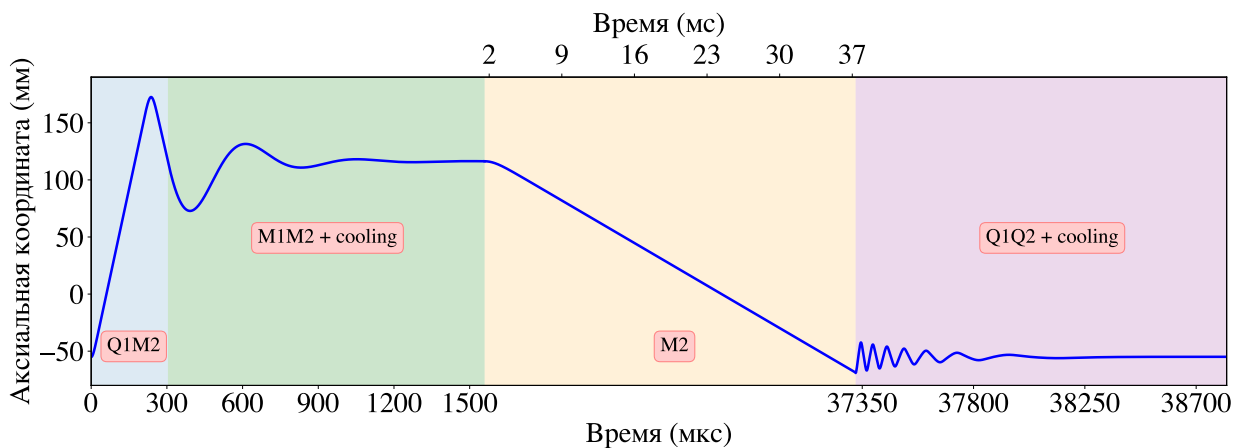


Рис. 3.14. Координата ионного облака, отсчитываемая от центра комбинированной ловушки, на характерных временах межсекционной перегрузки. Цветами обозначены временные интервалы включения соответствующих удерживающих электродов. Процесс охлаждения изображен качественно, учитывая удерживающий потенциал ловушек, начальные скорости ионов и силу оптического трения (1.73) при численных параметрах, описанных в разделе 3.2.



## Заключение

В данной работе был представлен принцип действия микроволнового стандарта частоты на основе ионов  $^{171}\text{Yb}^+$ . Описан алгоритм работы стандарта, включающий в себя захват и охлаждение ионов, инициализацию, процесс возбуждения часового перехода и детектирование состояния. С целью более детального учета квадратичного эффекта Доплера при возбуждении часового перехода были произведены численные расчеты распределения плотности ионов, захваченных в мультипольную ловушку, что позволило сравнить относительные сдвиги частоты в квадрупольной и мультипольной ловушках. На основе полученных результатов наглядно показано, что использование комбинированной ловушки может существенно ограничить сдвиг частоты, обусловленный эффектом Доплера второго порядка, поскольку ионное облако в таком случае имеет меньшую плотность при возбуждении часового перехода. Это позволяет работать с ионами при более высоких температурах, являющихся предельными для некоторых типов охлаждения.

Помимо этого, была полностью реализована экспериментальная установка для захвата и лазерного охлаждения изотопа иттербия  $^{174}\text{Yb}^+$ , включающая в себя питание квадрупольной и мультипольной ловушек, системы лазерного охлаждения и детектирования люминесценции. Была продемонстрирована кристаллизация захваченного в ловушку облака ионов  $^{174}\text{Yb}^+$ . Также произведены численные расчеты характерных времен межсекционной перегрузки ионного облака с учетом процессов лазерного охлаждения.

Последующими этапами на пути развития проекта является отработка техники перегрузки ионов между ловушками, подготовка оптической системы для захвата изотопа  $^{171}\text{Yb}^+$  и опрос часового перехода. В долгосрочные планы входит замена ионов иттербия на ионы ртути  $^{199}\text{Hg}^+$ , реализация техники охлаждения буферным газом и воспроизведение алгоритма работы микроволнового стандарта частоты.

## Список литературы

1. Systematic evaluation of an atomic clock at  $2 \times 10^{-18}$  total uncertainty / T. Nicholson [и др.] // [Nature communications](#). — 2015. — Т. 6, № 1. — С. 1—8.
2. *Khabarova K.* Atomic clouds stabilized to measure dilation of time // [Nature](#). — 2022. — Т. 602. — С. 391—392.
3. Gravitational wave detection with optical lattice atomic clocks / S. Kolkowitz [и др.] // [Physical Review D](#). — 2016. — Т. 94, № 12. — С. 124043.
4. *Uzan J.-P.* Varying constants, gravitation and cosmology // [Living reviews in relativity](#). — 2011. — Т. 14, № 1. — С. 1—155.
5. A sub-40-mHz-linewidth laser based on a silicon single-crystal optical cavity / T. Kessler [и др.] // [Nature Photonics](#). — 2012. — Т. 6, № 10. — С. 687—692.
6. Spectroscopy using quantum logic / P. O. Schmidt [и др.] // [Science](#). — 2005. — Т. 309, № 5735. — С. 749—752.
7. *Ye J., Kimble H., Katori H.* Quantum state engineering and precision metrology using state-insensitive light traps // [Science](#). — 2008. — Т. 320, № 5884. — С. 1734—1738.
8. Measuring the frequency of light with mode-locked lasers / J. Reichert [и др.] // [Science](#). — 2008. — Т. 320, № 5884. — С. 1734—1738.
9. Optical atomic coherence at the 1-second time scale / M. M. Boyd [и др.] // [Science](#). — 2006. — Т. 314, № 5804. — С. 1430—1433.
10. Demonstration of a trapped-ion atomic clock in space / E. Burt [и др.] // [Nature](#). — 2021. — Т. 595, № 7865. — С. 43—47.
11. *Berkeland D. J., Cruz F. C., Bergquist J. C.* Sum-frequency generation of continuous-wave light at 194 nm // [Applied Optics](#). — 1997. — Т. 36, № 18. — С. 4159—4162.
12. Fluorescence detection and buffer gas cooling of trapped mercury ions in Paul trap / S. Lei [и др.] // [Chinese Physics Letters](#). — 2008. — Т. 25, № 5. — С. 1653.
13. Sympathetic cooling of trapped ions: A laser-cooled two-species nonneutral ion plasma / D. Larson [и др.] // [Physical Review Letters](#). — 1986. — Т. 57, № 1. — С. 70.
14. Trapped-ion quantum computing: Progress and challenges / C. D. Bruzewicz [и др.] // [Applied Physics Reviews](#). — 2019. — Т. 6, № 2. — С. 021314.

15. Quantum dynamics of single trapped ions / D. Leibfried [и др.] // [Reviews of Modern Physics](#). — 2003. — Т. 75, № 1. — С. 281.
16. *Riehle F.* Frequency standards: basics and applications. — 2006.
17. *Tamir T.* Characteristic exponents of Mathieu functions // [Mathematics of Computation](#). — 1962. — Т. 16, № 77. — С. 100—106.
18. *Paul W.* Electromagnetic traps for charged and neutral particles // [Reviews of modern physics](#). — 1990. — Т. 62, № 3. — С. 531.
19. *Gerlich D.* Inhomogeneous rf fields: a versatile tool for the study of processes with slow ions // [Advances in chemical physics](#). — 1992. — Т. 82. — С. 1—176.
20. *Prestage J. D., Tjoelker R. L., Maleki L.* Higher pole linear traps for atomic clock applications // [Proceedings of the 1999 Joint Meeting of the European Frequency and Time Forum and the IEEE International Frequency Control Symposium \(Cat. No. 99CH36313\)](#). Т. 1. — 1999. — С. 121—124.
21. *Teloy E., Gerlich D.* Integral cross sections for ion—molecule reactions. I. The guided beam technique // [Chemical Physics](#). — 1974. — Т. 4, № 3. — С. 417—427.
22. *Davis E. J., Schweiger G.* Particle Levitation // [The Airborne Microparticle](#). — Springer, 2002. — С. 67—141.
23. *Hägg C., Szabo I.* New ion-optical devices utilizing oscillatory electric fields. IV. Computer simulations of the transport of an ion beam through an ideal quadrupole, hexapole, and octopole operating in the rf-only mode // [International journal of mass spectrometry and ion processes](#). — 1986. — Т. 73, № 3. — С. 295—312.
24. Doppler sideband spectra for ions in a linear trap / J. D. Prestage [и др.] // [1993 IEEE International Frequency Control Symposium](#). — 1993. — С. 148—154.
25. *Loundon R.* The Quantum Theory of Light. — 1973.
26. *Собельман И.* Введение в теорию атомных спектров. — 1963.
27. *Blatt R., Schnatz H., Werth G.* Precise determination of the  $^{171}\text{Yb}^+$  ground state Hyperfine separation // [Zeitschrift für Physik A Atoms and Nuclei](#). — 1983. — Т. 312, № 3. — С. 143—147.
28. *Mårtensson-Pendrill A.-M., Gough D. S., Hannaford P.* Isotope shifts and hyperfine structure in the 369.4-nm 6s-6 p 1/2 resonance line of singly ionized ytterbium // [Physical Review A](#). — 1994. — Т. 49, № 5. — С. 3351.

29. *Garstang R.* Radiative hyperfine transitions // [The Astrophysical Journal](#). —. — Т. 447. — С. 962.
30. Accurate measurement of the 12.6 GHz "clock" transition in trapped  $^{171}\text{Yb}^+$  ions / P. T. Fisk [и др.] // [IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control](#). — 1997. — Т. 44, № 2. — С. 344—354.
31. Manipulation and detection of a trapped  $\text{Yb}^+$  hyperfine qubit / S. Olmschenk [и др.] // [Physical Review A](#). — 2007. — Т. 76, № 5. — С. 052314.
32. *Андреанов Е. С., Виноградов А. П., Пухов А. А.* Лекции по квантовой оптике. — 2018.