

Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)

Диссертация допущена к защите
зав. кафедрой

_____ В.С. Лебедев

«_____» _____ 2022 г.

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
МАГИСТРА

Тема: **Проведение двухкубитной квантовой операции на
оптическом переходе в ионах $^{171}\text{Yb}^+$**

Направление: 03.04.01 – Прикладные математика и физика

Магистерская программа: Общая и прикладная физика

Выполнил студент гр. М02-027 _____ Н.В. Семенин

Научный руководитель,

д. ф.-м. н., гл. н. с.

_____ Н.Н. Колачевский

Рецензент,

к. ф.-м. н., профессор

_____ А.К. Фёдоров

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Квантовая динамика ионов	7
1.1. Движение одиночного иона в ловушке Пауля	7
1.2. Колебания линейного ионного кристалла в параболическом потенциале	9
1.3. Взаимодействие кристалла с лазерным излучением	11
1.3.1. Гамильтониан кристалла в ловушке	11
1.3.2. Действие внешнего лазерного поля	12
1.3.3. Боковые колебательные частоты	15
1.4. Перепутывание состояний ионов, MS-гейт	17
1.4.1. Гамильтониан взаимодействия	18
1.4.2. Оператор эволюции	18
1.4.3. Создание запутанных состояний	21
1.4.4. Измерение достоверности гейта	23
Глава 2. Ионы иттербия для квантовых вычислений	29
2.1. Схема уровней иона иттербия-171, оптический кубит	29
2.2. Охлаждение и перекачка	31
2.3. Подготовка и считывание состояния	32
Глава 3. Оптимизация достоверности считывания состояния иона	34
3.1. Теоретическая модель	34
3.2. Численная оптимизация параметров считывания	42
Глава 4. Эксперимент по проведению двухкубитной операции	46
4.1. Экспериментальная установка	46
4.1.1. Ионная ловушка	46
4.1.2. Оптическая система	47
4.2. Определение температуры ионного кристалла по дефазировке осцилляций Раби	50
4.2.1. Формула для дефазировки	50
4.2.2. Темпы нагрева одиночного иона	53
4.2.3. Температура кристалла из 5 ионов	55
4.3. Проведение MS-гейта	56
4.3.1. Экспериментальный протокол	57
4.3.2. Результаты эксперимента	60
Заключение	62
Список литературы	63

Введение

Сфера квантовых вычислений на протяжении последних 30 лет прошла путь от целиком теоретической концепции [1; 2] до мировой индустрии с устройствами, доступными как физически, так и через облачные технологии [3]. Интерес к этой области, влекущий соответствующий ему прогресс, обусловлен в большинстве своем перспективами решения квантовыми компьютерами задач, не поддающихся решению классическими компьютерами за обозримое время. Например, задача о разложении произвольного натурального числа на простые множители, даже с использованием оптимизированных классических алгоритмов [4; 5], решается за время, быстро (быстрее любого полинома) растущее с ростом раскладываемого числа. Квантовые же алгоритмы, в частности, алгоритм Шора [6], способен осуществить требуемое действие за полиномиальное (относительно $\log N$, где N — исходное число) время. Важность конкретно этой задачи связана с тем, что современные протоколы шифрования с открытым ключом, такие как RSA [7], используют практическую сложность решения задачи факторизации для генерации секретного ключа. Упрощение задачи в перспективе может привести к взлому протокола, хотя вопрос о возможности такого взлома остается открытым. Помимо криптографических приложений, квантовые вычисления находят применения и в других распространенных проблемах, например, поиск в неструктурированной базе данных. Линейное по размеру массива данных время выполнения классического алгоритма поиска уступает по скорости алгоритму Гровера [8], находящему решение задачи с большой вероятностью за число обращений к массиву, растущее как корень из размера массива.

Природа квантовых вычислителей позволяет использовать их не только для чисто математических, но и для физических задач, таких как симуляция эволюции произвольной квантовой системы [9]. С помощью квантовых симуляторов облегчается моделирование высокотемпературной сверхпроводимости [10], сверхтекучести, взаимодействия элементарных частиц в коллайдерах [11]. Симуляторы также расширяют возможности исследования свойств молекул и молекулярных кластеров [12]. Еще одна сфера применения квантовых компьютеров — задача дискретной оптимизации, то есть поиска глобального минимума функции на конечном множестве аргументов. Наличие квантовых флуктуаций и эффекта туннелирования обеспечивает работу вероятностных алгоритмов, таких как квантовый отжиг [13]. Устройства, реализующие данный алгоритм, получили широкое распространение и сегодня доступны коммерчески [14].

Ускорение квантовых алгоритмов по сравнению с классическими связано с *квантовым параллелизмом* — следствием из принципа суперпозиции, позволяющим в некотором смысле представить процесс квантового вычисления как вычисление значения функции, выполняемое одновременно над всеми возможными значениями аргумента. Еще один сугубо квантовый аспект, обеспечивающий превосходство квантовых вычислений над классическими в определенных задачах — *запутанность*. Взаимодействующие

квантовые системы становятся запутанными между собой, что на практике означает наличие корреляций между ними: измерение состояния одной системы будет влиять на состояние другой, даже если ее измерения не проводилось. В математическом смысле запутанность позволяет увеличить эквивалентную размерность доступного для вычислений пространства, экспоненциально увеличивая количество кодируемой информации.

Анализ условий, при которых возможна практическая реализация так называемого *универсального квантового компьютера* (компьютера, способного выполнить любой наперед заданный квантовый алгоритм с требуемой точностью), привел к формулировке критериев ДиВинченцо [15]. Первый критерий требует наличия масштабируемой квантовой системы с четко выделенной квантовой ячейкой информации — *кубитом*. Кубит представляет собой двухуровневую систему с некоторым энергетическим расстоянием между ними. В зависимости от конкретной физической системы, выбранной в качестве кубита, говорят о различных платформах для квантовых процессоров. Кубит является квантовым расширением понятия классического бита. Классический бит может находиться в одном из двух возможных состояний, тогда как состояние кубита представимо в виде суперпозиции, что частично обуславливает упомянутый ранее квантовый параллелизм. Требование четкой выделенности двух состояний связано с тем, что большая часть реализаций кубитов основана не на двухуровневых, а на многоуровневых системах (например, в нейтральных атомах или ионах), из которых по тем или иным соображениям выбирается два. Невырожденность этих двух состояний тем самым необходима, для того чтобы в процессе вычисления состояние кубитов не выходило за пределы вычислительного базиса. Масштабируемость квантового процессора выражается в том, что увеличение количества используемых кубитов не должно приводить к быстрому росту сложности установки. Для одних систем, например, сверхпроводящих кубитов, работающих на эффекте Джозефсона [16], масштабирование производится относительно легко [17]. Для других платформ, таких как холодные ионы в ловушке [18], это одно из самых больших препятствий [19].

Второй критерий ДиВинченцо — возможность инициализации состояния. Любой квантовый алгоритм должен на своем входе иметь известное квантовое состояние, иначе результат его выполнения будет бесполезен. Чаще всего это состояние совпадает с одним из базисных, то есть каждый кубит в нем не связан с остальными и сам находится в одном из своих базисных состояний. Методы эффективной подготовки состояния включают уже упомянутый квантовый отжиг, а также (для атомных систем) оптическую накачку.

Третий критерий — достаточно большое время когерентности кубитов. Сильная декогеренция, или потеря чистоты состояния вследствие взаимодействия с окружающей средой, быстро разрушит и суперпозицию, и запутанность, что сведет к нулю выигрыш в скорости выполнения алгоритма. По этой причине стремятся увеличить отношение времени когерентности ко времени выполнения одной элементарной квантовой операции, или *гейта*.

Четвертый критерий — наличие универсального набора гейтов. Этот критерий основан на том факте, что любую унитарную операцию на произвольном числе кубитов можно реализовать, используя только однокубитные операции и двухкубитный CNOT-гейт [20], так что эти два типа гейтов образуют универсальный набор. Соответственно в универсальном квантовом компьютере должна быть обеспечена возможность проведения обоих типов операций над кубитами.

Пятый критерий — возможность измерения состояния квантового регистра по окончании исполнения алгоритма. Очевидно, получить информацию о системе можно только после ее измерения, которое, как правило, выражается в проецировании ее состояния на вычислительный базис. Поэтому крайне важно выполнять детектирование с эффективностью, достаточной для различения базисных состояний.

Одна из перспективных платформ для квантовых вычислений, которая была упомянута ранее — ионы в ловушках. Кубитом в ионах служит пара уровней, между которыми электрический дипольный переход запрещен. Это сделано для того, чтобы время жизни верхнего состояния было достаточно большим. Вырождение по магнитным подуровням снимается эффектом Зеемана при помощи приложения магнитного поля, чтобы выделенная кубитная пара была обособленной. Из преимуществ данной платформы стоит выделить большое (по сравнению как с временем операции, так и с аналогичными временами для других платформ) время когерентности, достигающее величин больше часа [21]. Помимо этого, ионы взаимодействуют друг с другом по закону Кулона, а поскольку данное взаимодействие убывает с расстоянием достаточно медленно (относительно, например, сил Ван-дер-Ваальса между нейтральными атомами), возможно использовать общие колебательные моды целого ионного массива для перепутывания состояния двух произвольных (не обязательно соседних) ионов [22], осуществляя универсальную двухкубитную операцию. Все манипуляции над ионами, включая охлаждение, подготовку и считывание состояния, а также сами квантовые операции, осуществляются лазерным излучением, а их демонстрируемые эффективности [23; 24] достаточно большие для устойчивости квантовых вычислений к ошибкам [25]. Таким образом, в теории построение универсального квантового компьютера на ионах возможно, поскольку выполнены критерии ДиВинченцо.

Выбор удобного для работы иона основан на трех принципах. Во-первых, энергетическая структура уровней должна позволять использовать для охлаждения и подготовки/считывания состояния лазерные источники с длиной волны, доступной либо напрямую, либо через кратное увеличение частоты с помощью нелинейных оптических элементов. Во-вторых, вырождение по магнитным подуровням не должно быть слишком большим, ибо в противном случае подготовка состояния может потребовать усложнения системы. В-третьих, предпочтительнее выбирать ион с меньшей массой, так как при прочих равных условиях более легкий ион будет иметь большие эффективные частоты колебаний в потенциале ловушки, что приведет к подавлению эффекта Доплера и увеличению эффективности глубокого охлаждения [26].

Данная работа посвящена иону иттербия $^{171}\text{Yb}^+$. Несмотря на его большую массу, работа с этим ионом облегчается тем, что для нее требуется небольшое количество лазерных пучков, длина волны каждого из которых находится в технически удобном диапазоне. При этом одно из состояний кубита невырожденно, что избавляет от затруднений при накачке (подробнее о структуре уровней и используемых источниках в гл. 2). Как было указано ранее, наличие двухкубитного гейта в базовом наборе осуществимых над кубитами операций обязательно для реализации универсального вычислителя. В соответствии с этим критерием главной целью настоящей работы является проведение двухкубитной квантовой операции на оптическом переходе в ионах $^{171}\text{Yb}^+$ и измерении достоверности проведенного гейта.

Работа разделена на 4 главы. В первой главе содержатся теоретические сведения о захвате ионов в ловушку Пауля и последующем взаимодействии с лазерными пучками, осуществляющими двухкубитный гейт. Во второй главе приведено более подробное описание иона иттербия-171 с точки зрения квантовых вычислений. В третьей главе теоретически рассмотрен процесс детектирования состояния одиночного иона $^{171}\text{Yb}^+$ и проведена оптимизация параметров считывания. Четвертая глава посвящена экспериментам по измерению температуры ионного кристалла и по проведению двухкубитной операции. Глава 3 и теоретическая модель в разделе 4.2 были разработаны автором лично, экспериментальная часть проведена при его активном участии. Результаты упомянутых теоретических частей работы оформлены в виде научных публикаций [27; 28].

Квантовая динамика ионов

Данная глава посвящена изложению основных теоретических аспектов движения захваченного в ловушку ионного кристалла и его взаимодействия с внешним лазерным излучением.

1.1. Движение одиночного иона в ловушке Пауля

Как известно, заряженная частица не может быть локализована в пространстве статическими полями (следствие теоремы Ирншоу), однако при движении такой частицы в неоднородном периодическом по времени поле, меняющемся с достаточно большой частотой, возникнет средняя по периоду пондеромоторная сила, на которую уже не накладываются ограничения по устойчивости. Данный принцип реализован в ловушках Пауля — наиболее часто встречающемся типе ионных ловушек. В таких ловушках при помощи электродов специальной формы создана конфигурация поля, потенциал которого в зоне удержания близок к квадрупольному:

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{U}{2}(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2) + \frac{\tilde{U}}{2}(\alpha' x^2 + \beta' y^2 + \gamma' z^2) \cos \omega_{\text{rf}} t. \quad (1.1)$$

Первое слагаемое здесь — статическая часть, второе меняется с частотой ω_{rf} (порядка 10-20 МГц). Если пренебречь конечностью скорости света (что эквивалентно приближению больших длин волн радиочастотного поля), этот потенциал должен удовлетворять уравнению Лапласа:

$$\Delta \Phi = 0, \quad (1.2)$$

что верно при любых $U, \tilde{U}, \omega_{\text{rf}}$, если

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \alpha' + \beta' + \gamma' = 0. \quad (1.3)$$

Одним из вариантов реализации ловушки служит удержание статической компонентой вдоль какой-либо оси, являющейся осью симметрии. Оно соответствует выбору

$$\begin{aligned} -\alpha = -\beta = \gamma/2 > 0, \\ \alpha' = -\beta', \quad \gamma' = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

В таком случае по осям x, y будет осуществляться удержание переменным потенциалом, а по оси z — статическим.

В классическом рассмотрении уравнение движения иона в проекциях на ось x

(аналогично и y) сводятся к уравнению Матье:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - (a - 2q \cos(2\tau))x = 0, \quad (1.5)$$

где

$$\tau = \frac{\omega_{\text{rf}} t}{2}, \quad a = \frac{4ZeU\alpha}{m\omega_{\text{rf}}^2}, \quad q = \frac{2Ze\tilde{U}\alpha'}{m\omega_{\text{rf}}^2}. \quad (1.6)$$

Здесь Ze — заряд иона, m — его масса. Уравнение Матье является примером уравнения второго порядка с периодическим коэффициентом, для которого справедлива теорема Флоке, утверждающая наличие устойчивых решений вида

$$x(\tau) = Ae^{ib\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n} e^{i2n\tau} + Be^{-ib\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n} e^{-i2n\tau}, \quad (1.7)$$

Где A и B — произвольные константы, C_{2n} — коэффициенты, определяемые параметрами a и q . Число b носит название характеристической экспоненты. Она задает основную частоту движения иона, называемую секулярной:

$$\omega_s = \frac{b\omega_{\text{rf}}}{2}. \quad (1.8)$$

Движение иона будет финитным только при нахождении пары (a, q) в области стабильности решений уравнения Матье [29]. Первая такая область показана на рис. 1.

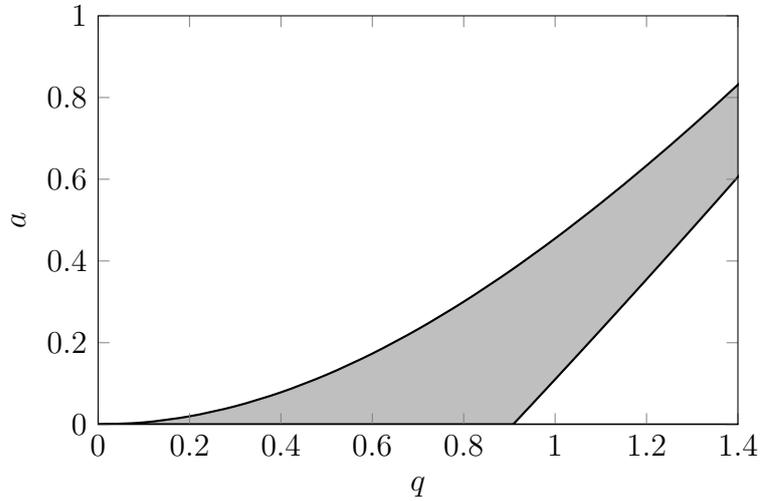


Рис. 1. Первая область устойчивости решения уравнения Матье

При малых a, q характеристическая экспонента равна [30]

$$b \approx \sqrt{q^2/2 - a}. \quad (1.9)$$

То есть движение иона представляет собой медленные (по сравнению с частотой ловушки) колебания с секулярной частотой, модулированные высокочастотными компонентами, называемыми микродвижением. В случае, когда характерные частоты воздействия

на ион малы по сравнению с частотой микродвижения, им можно пренебречь и считать ион находящимся в трехмерном гармоническом осцилляторе с радиальной частотой ω_s .

1.2. Колебания линейного ионного кристалла в параболическом потенциале

Проведение квантовых вычислений не может ограничиться захватом одиночного иона, так как для реализации универсального компьютера необходимо иметь как минимум одну операцию перепутывания состояний двух или более кубитов, каждому из которых в рассматриваемой постановке соответствует один ион. В связи с этим возникает потребность детального анализа динамики системы из нескольких ионов в ловушке Пауля.

В отличие от одиночного иона, многочастичная система обладает рядом нормальных мод колебаний. Нормальная мода характеризуется частотой и амплитудным вектором с числом компонент, равным числу частиц в системе, то есть в колебаниях принимает участие каждый ион, а результирующее движение конкретного иона будет суперпозицией нормальных колебаний. Тогда взаимодействие ионов друг с другом можно представить как возбуждение/девозбуждение некоторого набора мод и передачу энергии от одной моды в наборе к другой при воздействии на систему внешними полями.

Аксиальная частота линейной ловушки Пауля определяется статической частью потенциала:

$$\omega_z^2 = \frac{2ZeU\alpha}{m} = \frac{a\omega_{\text{rf}}^2}{2}. \quad (1.10)$$

В большинстве случаев параметр a заметно меньше параметра q , поэтому, как правило, аксиальная частота оказывается в несколько раз меньше радиальной. Это означает, что при загрузке более одного иона в ловушку энергетически наиболее выгодной будет ситуация, при которой ионы выстраиваются в линию вдоль оси симметрии, представляя собой линейный кристалл. Таким образом, равновесное положение ионов в радиальном направлении соответствует нулю переменного поля.

Перед нахождением нормальных мод кристалла необходимо определить равновесные координаты ионов на оси ловушки. Рассмотрим кристалл из N ионов с зарядами e , массами m и координатами z_i , $i = 1, \dots, N$. Потенциальная энергия кристалла складывается из энергии во внешнем гармоническом потенциале и из энергий взаимодействия ионов друг с другом:

$$V = \sum_{i=1}^N \frac{m\omega_z^2 z_i^2}{2} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{e^2}{2|z_i - z_j|}. \quad (1.11)$$

В положении равновесия производные энергии равны нулю: $\partial V / \partial z_i = 0$. Введем величину размерности длины $l^3 = \frac{e^2}{m\omega_z^2}$ и соответствующие безразмерные координаты $u_i = z_i / l$.

Тогда условие равновесия будет выражаться системой уравнений

$$u_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{(u_i - u_j)^2} + \sum_{j=i+1}^N \frac{1}{(u_i - u_j)^2} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.12)$$

Эта система легко решается при помощи численных методов, давая положения равновесия ионов u_i^0 .

Задача о малых колебаниях консервативной системы около положения равновесия сводится к нахождению собственных значений и собственных векторов матрицы вторых производных потенциальной энергии, а именно

$$\sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z_i \partial z_j} \right)_0 b_{k,j} = m \omega_{z,k}^2 b_{k,i}, \quad (1.13)$$

где $b_{k,i}$ — i -я компонента амплитудного вектора k -й нормальной моды колебаний (здесь рассматриваются колебания вдоль оси ловушки), а матрица вторых производных берется в точке $\{z_i^0\}$. В терминах безразмерных координат уравнение на собственные значения примет следующий вид:

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} b_{k,j} = \left(\frac{\omega_{z,k}}{\omega_z} \right)^2 b_{k,i}, \quad (1.14)$$

где

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 + 2 \sum_{l \neq i} \frac{1}{|u_i^0 - u_l^0|^3}, & j = i \\ -\frac{2}{|u_i^0 - u_j^0|^3}, & j \neq i \end{cases} \quad (1.15)$$

Для поперечных мод в направлениях x и y аналогичное уравнение будет содержать матрицу K_{ij} , выражающуюся через матрицу A_{ij} следующим образом:

$$K_{ij} = \left(\left(\frac{\omega_s}{\omega_z} \right)^2 + \frac{1}{2} \right) \delta_{ij} - \frac{1}{2} A_{ij}. \quad (1.16)$$

Уравнение на поперечные частоты принимает вид

$$\sum_{j=1}^N K_{ij} b_{k,j} = \left(\frac{\omega_{s,k}}{\omega_z} \right)^2 b_{k,i}. \quad (1.17)$$

Заметим, что матрицы A_{ij} и K_{ij} имеют общий набор собственных векторов (это следует из вида матрицы K_{ij}), значит, для частот мод справедливо следующее равенство:

$$2(\omega_s^2 - \omega_{s,k}^2) = \omega_{z,k}^2 - \omega_z^2. \quad (1.18)$$

Оно, в частности, означает, что при возрастании частоты продольных мод частоты поперечных уменьшаются, то есть частоты продольных колебаний ограничены снизу величиной ω_z , а поперечных — сверху величиной ω_s .

1.3. Взаимодействие кристалла с лазерным излучением

1.3.1. Гамильтониан кристалла в ловушке

Запишем классический гамильтониан кристалла, захваченного в линейную ловушку:

$$H_m = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \frac{m\omega_z^2}{2} \sum_{i,j} A_{ij} z_i z_j. \quad (1.19)$$

Здесь рассматриваются только аксиальные колебания вблизи точки равновесия, для остальных направлений вывод аналогичный. Заменяем переменные z_i, p_i с использованием амплитудных векторов из предыдущего раздела:

$$z_i = \sum_k Q_k b_{k,i}, \quad p_i = \sum_k P_k b_{k,i}, \quad (1.20)$$

где Q_k, P_k — новые канонические переменные. Их каноничность легко показать, вычислив скобку Пуассона:

$$\begin{aligned} \{Q_k, P_l\} &= \left\{ \sum_i z_i b_{k,i}, \sum_j p_j b_{l,j} \right\} = \sum_{i,j} b_{k,i} b_{l,j} \{z_i, p_j\} = \\ &= \sum_{i,j} b_{k,i} b_{l,j} \delta_{ij} = \sum_{i,j} b_{k,i} b_{l,i} = \delta_{kl}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

В последнем равенстве использовалась ортонормированность амплитудных векторов. Тогда слагаемые в гамильтониане примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{p_i^2}{2m} &= \frac{1}{2m} \sum_i \sum_{k,l} P_k b_{k,i} P_l b_{l,i} = \frac{1}{2m} \sum_{k,l} P_k P_l \sum_i b_{k,i} b_{l,i} = \\ &= \frac{1}{2m} \sum_{k,l} P_k P_l \delta_{kl} = \sum_k \frac{P_k^2}{2m}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{m\omega_z^2}{2} \sum_{i,j} A_{ij} z_i z_j &= \frac{m\omega_z^2}{2} \sum_{i,j} \sum_{k,l} A_{ij} Q_k b_{k,i} Q_l b_{l,j} = \\ &= \frac{m\omega_z^2}{2} \sum_{k,l} Q_k Q_l \sum_{i,j} A_{ij} b_{k,i} b_{l,j} = \frac{m\omega_z^2}{2} \sum_{k,l} Q_k Q_l \frac{\omega_{z,k}^2}{\omega_z^2} \sum_j b_{k,j} b_{l,j} = \\ &= \frac{m}{2} \sum_{k,l} \omega_{z,k}^2 Q_k Q_l \delta_{kl} = \sum_k \frac{m\omega_{z,k}^2 Q_k^2}{2}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Таким образом, имеем сумму гамильтонианов независимых осцилляторов вида

$$H_m = \sum_k \left(\frac{P_k^2}{2m} + \frac{m\omega_{z,k}^2 Q_k^2}{2} \right). \quad (1.24)$$

Применяя процедуру канонического квантования, аналогичную одиночному осциллятору, приходим к выражению для квантового гамильтониана колебательных степеней свободы кристалла:

$$\hat{H}_m = \hbar \sum_k \omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right). \quad (1.25)$$

Здесь опущен индекс оси, а сумма берется по всем модам всех направлений колебаний кристалла (x , y и z).

Пусть каждый ион представляет собой двухуровневую систему из состояний $|0\rangle$ и $|1\rangle$ (эти состояния и образуют ионный кубит), а разница энергий между этими уровнями равна $\hbar\omega_{01}$. Тогда электронную часть гамильтониана j -го иона можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{H}_e^{(j)} &= \hbar\omega_{01}(|0\rangle\langle 0|)_j = \frac{\hbar\omega_{01}}{2}(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)_j + \frac{\hbar\omega_{01}}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)_j = \\ &= \frac{\hbar\omega_{01}}{2}(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)_j + \frac{\hbar\omega_{01}}{2} = \frac{\hbar\omega_{01}}{2}\hat{\sigma}_z^{(j)} + \frac{\hbar\omega_{01}}{2}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Полный электронный гамильтониан будет суммой по всем ионам:

$$\hat{H}_e = \sum_j \left(\frac{\hbar\omega_{01}}{2}\hat{\sigma}_z^{(j)} + \frac{\hbar\omega_{01}}{2} \right). \quad (1.27)$$

Таким образом, с точностью до сдвига на константу получаем гамильтониан невозмущенного кристалла с учетом внутренних и колебательных степеней свободы:

$$\hat{H}_0 = \hbar \sum_k \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{\hbar\omega_{01}}{2} \sum_j \hat{\sigma}_z^{(j)}. \quad (1.28)$$

1.3.2. Действие внешнего лазерного поля

Гамильтониан взаимодействия поля бегущей плоской монохроматической волны, частота которой близка к ω_{01} , с j -м ионом можно представить в виде

$$\hat{H}_I^{(j)} = \frac{\hbar\Omega_j}{2}(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)_j (e^{i(\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}_j - \omega t + \phi)} + e^{-i(\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}_j - \omega t + \phi)}), \quad (1.29)$$

где Ω_j — резонансная частота Раби, зависящая от типа перехода (электрический квадрупольный, магнитный дипольный и т.д.), амплитуды поля, его поляризации и направления пучка. Для исключения из эволюции системы слагаемого \hat{H}_0 перейдем к пред-

ставлению взаимодействия, то есть произведем унитарное преобразование

$$\hat{U}_0 = \exp\left(-\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}\right). \quad (1.30)$$

Гамильтониан взаимодействия тогда примет вид

$$\begin{aligned} \hat{H}_i^{(j)} = \hat{U}_0^\dagger \hat{H}_I^{(j)} \hat{U}_0 &= \frac{\hbar\Omega_j}{2} e^{(i/\hbar)\hat{H}_e^{(j)}t} \left(\hat{\sigma}_+^{(j)} + \hat{\sigma}_-^{(j)}\right) e^{-(i/\hbar)\hat{H}_e^{(j)}t} \times \\ &\times e^{(i/\hbar)\hat{H}_m t} \left(e^{i(\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}_j - \omega t + \phi)} + e^{-i(\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}_j - \omega t + \phi)}\right) e^{-(i/\hbar)\hat{H}_m t}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Для вычисления первого множителя воспользуемся равенством

$$e^{\hat{X}} \hat{Y} e^{-\hat{X}} = \hat{Y} + [\hat{X}, \hat{Y}] + \frac{1}{2!} [\hat{X}, [\hat{X}, \hat{Y}]] + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(\hat{X})^n, \hat{Y}]}{n!}, \quad (1.32)$$

а также свойством матриц Паули:

$$[\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_\pm] = \pm 2\hat{\sigma}_\pm. \quad (1.33)$$

Тогда имеем:

$$e^{(i\omega_{01}t/2)\hat{\sigma}_z} \hat{\sigma}_\pm e^{-(i\omega_{01}t/2)\hat{\sigma}_z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\omega_{01}t)^n [(\hat{\sigma}_z)^n, \hat{\sigma}_\pm]}{2^n n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm i\omega_{01}t)^n}{n!} \hat{\sigma}_\pm = \hat{\sigma}_\pm e^{\pm i\omega_{01}t}. \quad (1.34)$$

Для упрощения дальнейших рассуждений предположим, что лазерный пучок направлен вдоль одной из главных осей ловушки, например, оси x (результат легко обобщается на произвольное направление пучка). Тогда в показателе экспоненты плоской волны скалярное произведение $\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}_j$ заменится на $k\hat{x}_j$, где \hat{x}_j — оператор координаты j -го иона. Оператор координаты выражается через канонические обобщенные координаты системы осцилляторов посредством

$$\hat{x}_j = \sum_l \hat{Q}_l b_{l,j}. \quad (1.35)$$

Здесь суммирование производится по модам колебаний вдоль оси x . Переход к лестничным операторам мод задается стандартным равенством

$$\hat{Q}_l = x_0(\hat{a}_l + \hat{a}_l^\dagger), \quad (1.36)$$

где

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_l}}. \quad (1.37)$$

Тогда искомый показатель экспоненты будет равен

$$ik\hat{x}_j = i \sum_l \eta_{l,j}(\hat{a}_l + \hat{a}_l^\dagger), \quad (1.38)$$

где коэффициенты $\eta_{l,j} = kx_0 b_{l,j}$ носят название параметров Лэмба-Дике и определяют порядок отношения ширины волновой функции иона в основном колебательном состоянии к длине волны излучения.

Чтобы вычислить второй множитель выражения (1.31), рассмотрим вспомогательную задачу. Пусть есть аналитическая операторозначная функция лестничных операторов $\hat{f}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$. Ее аналитичность выражается условием разложимости в степенной ряд вида

$$\hat{f}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) = \sum_{p,q} c_{pq} (\hat{a}^\dagger)^p (\hat{a})^q. \quad (1.39)$$

Необходимо определить вид этой функции при переходе в представление взаимодействия, то есть найти значение выражения

$$\hat{F}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger, t) = e^{i\omega_0 t \hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{f}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) e^{-i\omega_0 t \hat{a}^\dagger \hat{a}}. \quad (1.40)$$

Легко показать, что данная функция является решением уравнения Гейзенберга:

$$\frac{d\hat{F}}{dt} = i\omega_0 [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{F}], \quad \hat{F}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger, 0) = \hat{f}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger). \quad (1.41)$$

Будем искать решение в виде аналитической функции, аналогичной функции \hat{f} :

$$\hat{F}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger, t) = \sum_{p,q} C_{pq}(t) (\hat{a}^\dagger)^p (\hat{a})^q, \quad C_{pq}(0) = c_{pq}. \quad (1.42)$$

После подстановки в уравнение Гейзенберга в правой части возникнут члены вида

$$[\hat{a}^\dagger \hat{a}, (\hat{a}^\dagger)^p (\hat{a})^q] = \hat{a}^\dagger [\hat{a}, (\hat{a}^\dagger)^p] (\hat{a})^q + (\hat{a}^\dagger)^p [\hat{a}^\dagger, (\hat{a})^q] \hat{a}. \quad (1.43)$$

Используя метод индукции, можно показать, что

$$[\hat{a}, (\hat{a}^\dagger)^p] = p(\hat{a}^\dagger)^{p-1}, \quad [\hat{a}^\dagger, (\hat{a})^q] = -q(\hat{a})^{q-1}. \quad (1.44)$$

Тогда

$$[\hat{a}^\dagger \hat{a}, (\hat{a}^\dagger)^p (\hat{a})^q] = (p - q) (\hat{a}^\dagger)^p (\hat{a})^q. \quad (1.45)$$

Подставляя в уравнение Гейзенберга, получаем следующее уравнение:

$$\sum_{p,q} \dot{C}_{pq}(t) (\hat{a}^\dagger)^p (\hat{a})^q = \sum_{p,q} i\omega_0 (p - q) C_{pq}(t) (\hat{a}^\dagger)^p (\hat{a})^q. \quad (1.46)$$

Приравнивая компоненты при соответственных степенях операторов, получаем набор уравнений

$$\dot{C}_{pq}(t) = i\omega_0 (p - q) C_{pq}(t), \quad C_{pq}(0) = c_{pq}, \quad (1.47)$$

решением которого являются функции

$$C_{pq}(t) = c_{pq} e^{i(p-q)\omega_0 t}, \quad (1.48)$$

а функция \hat{F} будет иметь вид

$$\begin{aligned} \hat{F}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger, t) &= \sum_{p,q} c_{pq} e^{i(p-q)\omega_0 t} (\hat{a}^\dagger)^p (\hat{a})^q = \\ &= \sum_{p,q} c_{pq} (\hat{a}^\dagger e^{i\omega_0 t})^p (\hat{a} e^{-i\omega_0 t})^q = \hat{f}(\hat{a} e^{-i\omega_0 t}, \hat{a}^\dagger e^{i\omega_0 t}). \end{aligned} \quad (1.49)$$

Таким образом, получаем, что любая аналитическая функция от лестничных операторов при переходе в представление взаимодействия преобразуется следующим образом:

$$\hat{f}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) \rightarrow \hat{f}(\hat{a} e^{-i\omega_0 t}, \hat{a}^\dagger e^{i\omega_0 t}). \quad (1.50)$$

Применим этот результат для вычисления второго множителя выражения (1.31). Используя обозначения (1.38), сразу приходим к ответу:

$$\begin{aligned} e^{(i/\hbar)\hat{H}_m t} (e^{i(\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}_j - \omega t + \phi)} + e^{-i(\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}_j - \omega t + \phi)}) e^{-(i/\hbar)\hat{H}_m t} = \\ = e^{i(-\omega t + \phi)} \exp \left[i \sum_l \eta_{l,j} (\hat{a}_l e^{-i\omega_l t} + \hat{a}_l^\dagger e^{i\omega_l t}) \right] + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (1.51)$$

Умножение зависящих от времени экспонент в обоих множителях выражения (1.31) приведет к появлению членов вида $\exp(\pm i(\omega \pm \omega_{01})t)$. Осцилляции с суммарной частотой происходят гораздо быстрее, чем с разностной, поскольку обе частоты оптического диапазона, а ω предполагается близким к ω_{01} . Поэтому быстрые экспоненты не приводят к заметному влиянию на эволюцию системы, и ими можно пренебречь (это приближение получило название приближения вращающейся волны). В итоге приходим к выражению для гамильтониана взаимодействия поля с j -м ионом:

$$\hat{H}_i^{(j)} = \frac{\hbar\Omega_j}{2} \hat{\sigma}_+^{(j)} \exp \left[i \sum_l \eta_{l,j} (\hat{a}_l e^{-i\omega_l t} + \hat{a}_l^\dagger e^{i\omega_l t}) \right] e^{i(\phi - \delta t)} + \text{h.c.}, \quad (1.52)$$

где $\delta = \omega - \omega_{01}$. Для всего кристалла полный гамильтониан будет суммой выражений (1.52) по всем ионам и (в случае нескольких пучков) по всем пучкам.

1.3.3. Боковые колебательные частоты

Гамильтониан (1.52) с точностью до прибавления эрмитово сопряженной части представляет собой произведение оператора, действующего на внутренние переменные иона ($\hat{\sigma}_+^{(j)}$), и оператора, действующего на внешние, то есть колебательные ($\exp[\dots]$).

Базисный вектор состояния иона в кристалле имеет вид

$$|\psi\rangle = |\text{el}\rangle |n_1, n_2, \dots, n_N\rangle = |\text{el}\rangle |\{n_k\}\rangle, \quad (1.53)$$

где $|\text{el}\rangle \in \{|0\rangle, |1\rangle\}$, а общее число мод равно N . Поскольку лестничные операторы различных мод коммутируют, матричный элемент гамильтониана (1.52) по колебательным состояниям может быть выражен через произведение однотипных множителей:

$$\left(\hat{H}_i^{(j)}\right)_{n,n'} = \frac{\hbar\Omega_j}{2} \hat{\sigma}_+^{(j)} e^{i(\phi-\delta t)} \prod_{l=1}^N \langle n_l | e^{im_{l,j}(\hat{a}_l e^{-i\omega_l t} + \hat{a}_l^\dagger e^{i\omega_l t})} | n'_l \rangle + \text{h.c.} \quad (1.54)$$

Под n и n' подразумеваются наборы $\{n_k\}$ и $\{n'_k\}$ соответственно. Каждый член произведения равен

$$\begin{aligned} \langle n_l | e^{im_{l,j}(\hat{a}_l e^{-i\omega_l t} + \hat{a}_l^\dagger e^{i\omega_l t})} | n'_l \rangle &= \langle n_l | e^{i\omega_l \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l t} e^{im_{l,j}(\hat{a}_l + \hat{a}_l^\dagger)} e^{-i\omega_l \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l t} | n'_l \rangle = \\ &= e^{i\omega_l(n_l - n'_l)t} \langle n_l | e^{im_{l,j}(\hat{a}_l + \hat{a}_l^\dagger)} | n'_l \rangle. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Таким образом, при рассмотрении перехода с изменением колебательных чисел $n \leftrightarrow n'$ возникает гамильтониан, аналогичный гамильтониану, задающему осцилляции Раби в двухуровневой системе, с двумя модификациями. Во-первых, в качестве отстройки от резонанса выступает отстройка от перехода $|0, n\rangle \leftrightarrow |1, n'\rangle$, а не от перехода $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$, что вполне естественно, потому что рассматриваемый матричный элемент осуществляет именно первый из переходов. Во-вторых, резонансная частота Раби получает поправку вида

$$\Omega_j^{(n,n')} = \Omega_j \prod_{l=1}^N D_{n_l, n'_l}^{(j)}. \quad (1.56)$$

Числа $D_{n_l, n'_l}^{(j)}$ называются коэффициентами Дебая-Уоллера и равны [30]

$$D_{n_l, n'_l}^{(j)} = \left| \langle n_l | e^{im_{l,j}(\hat{a}_l + \hat{a}_l^\dagger)} | n'_l \rangle \right| = e^{-\eta_{l,j}^2/2} \eta_{l,j}^{|s|} \sqrt{\frac{n_{<}!}{n_{>}!}} \times |L_{n_{<}}^{|s|}(\eta_{l,j}^2)|, \quad (1.57)$$

где $n_{<}$ и $n_{>}$ — соответственно меньшее и большее из n_l и n'_l , $s = n_l - n'_l$, а $L_n^\alpha(x)$ — обобщенный полином Лагерра.

Перед проведением квантовых вычислений кристалл, предварительно захваченный в ловушку, охлаждают для повышения эффективности операций. Первый этап состоит в доплеровском охлаждении, для которого используется электрический дипольный переход, отличающийся от кубитного. Это приводит к уменьшению средних чисел заполнения мод \bar{n}_l . Как правило, после этой процедуры выполняется неравенство

$$\eta_{l,j} \sqrt{\langle (\hat{a}_l + \hat{a}_l^\dagger)^2 \rangle} \ll 1 \quad (1.58)$$

(режим Лэмба-Дике). В таком случае можно раскрыть выражение (1.52) до первого порядка по $\eta_{l,j}$:

$$\hat{H}_i^{(j)} \approx \frac{\hbar\Omega_j}{2} \hat{\sigma}_+^{(j)} \left[1 + i \sum_l \eta_{l,j} (\hat{a}_l e^{-i\omega_l t} + \hat{a}_l^\dagger e^{i\omega_l t}) \right] e^{i(\phi - \delta t)} + \text{h.c.} \quad (1.59)$$

Рассмотрим одну конкретную моду кристалла, оставив в сумме (1.59) одно слагаемое. Приближение Лэмба-Дике подразумевает наличие трех типов переходов. Первый из них имеет резонанс при $\delta = 0$, и его резонансный гамильтониан имеет вид

$$\hat{H}_c^{(j)} = \frac{\hbar\Omega_j}{2} (\hat{\sigma}_+^{(j)} e^{i\phi} + \hat{\sigma}_-^{(j)} e^{-i\phi}). \quad (1.60)$$

Это взаимодействие называется взаимодействием на несущей частоте, и оно осуществляет осцилляции между состояниями $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ (для любой моды) с частотой Раби Ω_j . Второй тип имеет резонанс при $\delta = \omega_l$, и его гамильтониан

$$\hat{H}_b^{(j)} = \frac{\hbar\Omega_j\eta_{l,j}}{2} (\hat{a}_l^\dagger \hat{\sigma}_+^{(j)} e^{i\phi} + \hat{a}_l \hat{\sigma}_-^{(j)} e^{-i\phi}). \quad (1.61)$$

Это гамильтониан взаимодействия на первой синей боковой частоте, приводящий к осцилляциям $|0, n_l + 1\rangle \leftrightarrow |1, n_l\rangle$ с частотой $\Omega_j\eta_{l,j}\sqrt{n_l + 1}$. Его симметричная относительно знака отстройки часть ($\delta = -\omega_l$) называется взаимодействием на первой красной боковой частоте, его гамильтониан

$$\hat{H}_r^{(j)} = \frac{\hbar\Omega_j\eta_{l,j}}{2} (\hat{a}_l \hat{\sigma}_+^{(j)} e^{i\phi} + \hat{a}_l^\dagger \hat{\sigma}_-^{(j)} e^{-i\phi}) \quad (1.62)$$

приводит к осцилляциям $|0, n_l - 1\rangle \leftrightarrow |1, n_l\rangle$ с частотой $\Omega_j\eta_{l,j}\sqrt{n_l}$. Таким образом, отстройка лазерного излучения на частоту моды позволяет перепутать электронное состояние отдельного иона с колебательным состоянием всего кристалла. Если количество взаимодействующих с излучением ионов больше одного, то общие для всех ионов колебательные состояния можно использовать для передачи взаимодействия от одного иона к другим и осуществить перепутывание их электронных состояний.

1.4. Перепутывание состояний ионов, MS-гейт

Современные архитектуры квантовых ионных процессоров чаще всего содержат в качестве двухкубитной перепутывающей операции так называемый MS-гейт, названный по фамилиям его авторов: К. Mølmer и А. Sørensen [31]. Его преимущество состоит в отсутствии строгого требования охлаждения кристалла до основного колебательного состояния и в отсутствии необходимости индивидуальной адресации ионов несколькими пучками.

1.4.1. Гамильтониан взаимодействия

MS-гейт реализуется следующим образом. К каждому рассматриваемому иону прикладывается бихроматическое излучение, то есть излучение из двух частотных компонент одинаковой интенсивности, расположенных симметрично относительно несущей:

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{MS}}^{(j)} &= \frac{\hbar\Omega_j}{2} \left\{ \left(\hat{\sigma}_+^{(j)} \left[1 + i \sum_l \eta_{l,j} (\hat{a}_l e^{-i\omega_l t} + \hat{a}_l^\dagger e^{i\omega_l t}) \right] e^{i(\phi_b^{(j)} - \delta t)} + \text{h.c.} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\hat{\sigma}_+^{(j)} \left[1 + i \sum_l \eta_{l,j} (\hat{a}_l e^{-i\omega_l t} + \hat{a}_l^\dagger e^{i\omega_l t}) \right] e^{i(\phi_r^{(j)} + \delta t)} + \text{h.c.} \right) \right\} = \\ &= \frac{\hbar\Omega_j}{2} \left(\hat{\sigma}_+^{(j)} \left[1 + i \sum_l \eta_{l,j} (\hat{a}_l e^{-i\omega_l t} + \hat{a}_l^\dagger e^{i\omega_l t}) \right] \left(e^{i(\phi_b^{(j)} - \delta t)} + e^{i(\phi_r^{(j)} + \delta t)} \right) + \text{h.c.} \right). \quad (1.63)\end{aligned}$$

Это выражение можно привести к виду

$$\hat{H}_{\text{MS}}^{(j)} = \hbar\Omega_j \cos(\delta t + \phi_M^{(j)}) \hat{\sigma}_{\phi_\perp}^{(j)} - \hbar\Omega_j \cos(\delta t + \phi_M^{(j)}) \hat{\sigma}_\phi^{(j)} \sum_l \eta_{l,j} (\hat{a}_l e^{-i\omega_l t} + \hat{a}_l^\dagger e^{i\omega_l t}), \quad (1.64)$$

где

$$\phi_M^{(j)} = \frac{\phi_r^{(j)} - \phi_b^{(j)}}{2}, \quad \phi_S^{(j)} = \frac{\phi_r^{(j)} + \phi_b^{(j)}}{2}, \quad (1.65)$$

$$\hat{\sigma}_\phi^{(j)} = \hat{\sigma}_x^{(j)} \sin \phi_S^{(j)} + \hat{\sigma}_y^{(j)} \cos \phi_S^{(j)}, \quad \hat{\sigma}_{\phi_\perp}^{(j)} = \hat{\sigma}_x^{(j)} \cos \phi_S^{(j)} - \hat{\sigma}_y^{(j)} \sin \phi_S^{(j)}. \quad (1.66)$$

Отстройка δ подбирается близкой к секулярной частоте одной из мод, то есть резонансный вид сохраняет только слагаемое с боковыми частотами (в общем случае всех мод), а взаимодействие на несущей пренебрежимо мало при $\Omega_j \ll \delta$, поэтому гамильтониан взаимодействия кристалла с полем примет вид

$$\hat{H}_{\text{MS}} = \sum_j \hat{H}_{\text{MS}}^{(j)} = - \sum_{l,j} \hbar \eta_{l,j} \Omega_j \cos(\delta t + \phi_M^{(j)}) (\hat{a}_l e^{-i\omega_l t} + \hat{a}_l^\dagger e^{i\omega_l t}) \hat{\sigma}_\phi^{(j)}. \quad (1.67)$$

В общем случае частоты Раби Ω_j зависят от времени.

1.4.2. Оператор эволюции

Эволюция системы может быть представлена в виде разложения Магнуса [32]:

$$\hat{U}(\tau) = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \hat{A}_k(\tau) \right), \quad (1.68)$$

где

$$\hat{A}_1(\tau) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^\tau \hat{H}_{\text{MS}} dt, \quad (1.69)$$

$$\hat{A}_2(\tau) = -\frac{1}{2\hbar^2} \int_0^\tau dt_1 \int_0^{t_1} [\hat{H}_{\text{MS}}(t_1), \hat{H}_{\text{MS}}(t_2)] dt_2. \quad (1.70)$$

Слагаемые высших порядков содержат коммутаторы типа $[\hat{a}_l^\dagger, [\hat{a}_l, \hat{a}_l^\dagger]]$ и $[\hat{a}_l, [\hat{a}_l, \hat{a}_l^\dagger]]$, поэтому они равны нулю. Первый оператор представляется в виде

$$\hat{A}_1(\tau) = \sum_{l,j} \left(\alpha_{l,j}(\tau) \hat{a}_l^\dagger - \alpha_{l,j}^*(\tau) \hat{a}_l \right) \hat{\sigma}_\phi^{(j)}, \quad (1.71)$$

где

$$\alpha_{l,j}(\tau) = i\eta_{l,j} \int_0^\tau \Omega_j(t) \cos(\delta t + \phi_M^{(j)}) e^{i\omega_l t} dt. \quad (1.72)$$

Рассмотрим действие этого оператора подробнее. Если в разложении Магнуса оставить только первую экспоненту, получим

$$\exp \left[\sum_{l,j} \left(\alpha_{l,j}(\tau) \hat{a}_l^\dagger - \alpha_{l,j}^*(\tau) \hat{a}_l \right) \hat{\sigma}_\phi^{(j)} \right] = \prod_l \exp \left[\sum_j \left(\alpha_{l,j}(\tau) \hat{a}_l^\dagger - \alpha_{l,j}^*(\tau) \hat{a}_l \right) \hat{\sigma}_\phi^{(j)} \right]. \quad (1.73)$$

Каждый из операторов в произведении представляет собой оператор смещения в фазовом пространстве на величину, зависящую от времени и внутреннего состояния ионов, и действует на его колебательные степени свободы. Визуально действие оператора легко понять по его преобразованию когерентного состояния одной конкретной моды, когда освещен один ион. Если частоту Раби считать постоянной на время операции, зависимость α от времени имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha_{l,j}(\tau) &= i\eta_{l,j} \Omega_j \int_0^\tau \cos(\delta t + \phi_M^{(j)}) e^{i\omega_l t} dt = \\ &= \frac{\eta_{l,j} \Omega_j \left[e^{i\omega_l \tau} \left(\omega_l \cos(\delta \tau + \phi_M^{(j)}) - i\delta \sin(\delta \tau + \phi_M^{(j)}) \right) - \omega_l \cos \phi_M^{(j)} + i\delta \sin \phi_M^{(j)} \right]}{\omega_l^2 - \delta^2}. \end{aligned} \quad (1.74)$$

При малой отстройке от секулярной частоты $\mu_l = \delta - \omega_l \ll \omega_l$ имеем

$$\alpha_{l,j}(\tau) \approx -\frac{\eta_{l,j} \Omega_j e^{-i\phi_M^{(j)}} (e^{-i\mu_l \tau} - 1)}{2\mu_l}. \quad (1.75)$$

Траектория состояния — окружность диаметра $\eta_{l,j} \Omega_j / \mu_l$, проходящая через начало координат. Радиус-вектор ее центра расположен под углом $\phi_M^{(j)}$ к горизонтальной оси. Для собственных векторов оператора $\hat{\sigma}_\phi^{(j)}$ с собственными значениями ± 1 траектории

будут симметричны друг другу относительно начала (рис. 2). Зависимость траектории

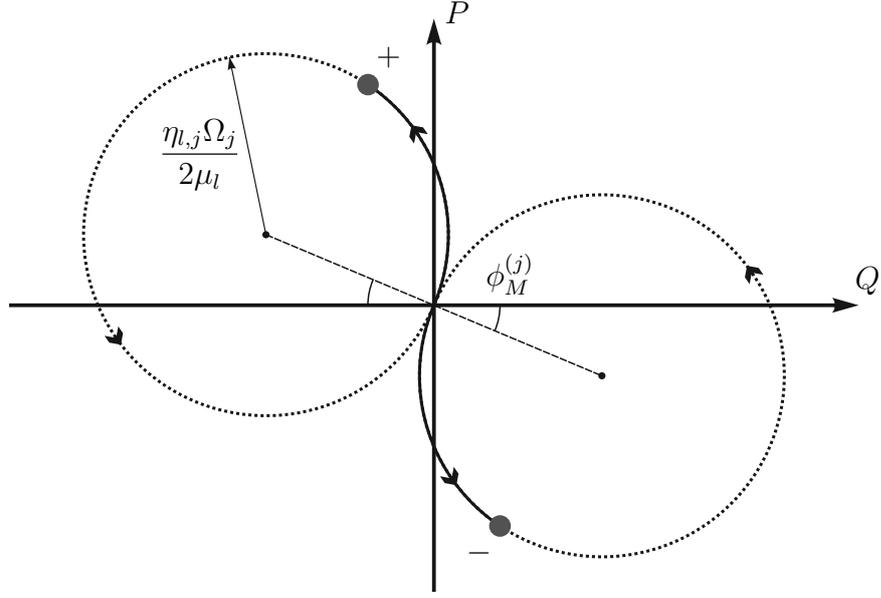


Рис. 2. Эволюция когерентных состояний при проведении MS-гейта

колебательного состояния иона от его внутреннего состояния является реализацией так называемой спин-зависимой силы (spin-dependent force), которая и приводит к перепутыванию внутренних состояний нескольких ионов, как будет видно ниже.

Вычислим второй оператор в разложении Магнуса. С учетом коммутационных соотношений на лестничные операторы получаем следующее выражение:

$$\hat{A}_2(\tau) = i \sum_{j,k} \chi_{jk}(\tau) \hat{\sigma}_\phi^{(j)} \hat{\sigma}_\phi^{(k)}, \quad (1.76)$$

где

$$\chi_{jk}(\tau) = - \sum_l \eta_{l,j} \eta_{l,k} \int_0^\tau dt_1 \int_0^{t_1} \Omega_j(t_1) \Omega_k(t_2) \cos(\delta t_1 + \phi_M^{(j)}) \cos(\delta t_2 + \phi_M^{(k)}) \times \\ \times \sin(\omega_l(t_2 - t_1)) dt_2. \quad (1.77)$$

Заметим, что данный оператор не затрагивает колебательные состояния и зависит от попарных произведений сигма-операторов для различных пар ионов. Следовательно, именно этот оператор обеспечивает перепутывание внутренних состояний. При посто-

янных частотах Раби коэффициент перепутывания χ_{jk} равен

$$\begin{aligned} \chi_{jk}(\tau) = \sum_l \frac{\eta_{l,j}\eta_{l,k}\Omega_j\Omega_k}{2} & \left(\frac{\omega_l\tau \cos(\phi_M^{(j)} - \phi_M^{(k)})}{\omega_l^2 - \delta^2} - \right. \\ & - \frac{\sin(\omega_l\tau) \cos(\delta\tau + \phi_M^{(j)} + \phi_M^{(k)})}{\omega_l^2 - \delta^2} + \frac{\omega_l \sin(\delta\tau) \cos(\delta\tau + \phi_M^{(j)} + \phi_M^{(k)})}{\delta(\omega_l^2 - \delta^2)} + \\ & + \frac{2\omega_l\delta \left(\cos(\omega_l\tau) \sin(\delta\tau + \phi_M^{(j)} - \phi_M^{(k)}) - \sin(\phi_M^{(j)} - \phi_M^{(k)}) \right)}{(\omega_l^2 - \delta^2)^2} - \\ & \left. - \frac{(\omega_l^2 + \delta^2) \sin(\omega_l\tau) \cos(\delta\tau + \phi_M^{(j)} - \phi_M^{(k)})}{(\omega_l^2 - \delta^2)^2} \right). \end{aligned} \quad (1.78)$$

Если отстройка от одной из мод мала: $\mu_l = \delta - \omega_l \ll \omega_l$, то в сумме можно учесть только резонансное слагаемое:

$$\begin{aligned} \chi_{jk}(\tau) \approx -\frac{\eta_{l,j}\eta_{l,k}\Omega_j\Omega_k}{2} & \left(\frac{\tau \cos(\phi_M^{(j)} - \phi_M^{(k)})}{2\mu_l} - \right. \\ & \left. - \frac{\sin(\mu_l\tau + \phi_M^{(j)} - \phi_M^{(k)}) - \sin(\phi_M^{(j)} - \phi_M^{(k)})}{2\mu_l^2} \right). \end{aligned} \quad (1.79)$$

1.4.3. Создание запутанных состояний

Поскольку в результате операции ожидается перепутывание только внутренних состояний ионов, в ее конце не должно быть остаточной запутанности внутренних степеней свободы с колебательными. Оно задается оператором смещения $\hat{A}_1(\tau)$. Условие отсутствия запутанности с колебательными состояниями выразится в равенстве нулю параметра смещения $\alpha_{l,j}(\tau)$. Из (1.75) видно, что оно эквивалентно

$$|\mu_l|\tau = 2\pi n, \quad (1.80)$$

откуда время импульса равно

$$\tau_g = \frac{2\pi n}{|\mu_l|}. \quad (1.81)$$

Формально это условие должно выполняться для всех мод, однако в случае малой отстройки от одной выделенной моды остальные коэффициенты $\alpha_{l,j}$ по модулю малы и невыполнение условия для них заметно на эффективность операции не влияет. Под-

ставляя в (1.79), получаем

$$\chi_{jk}(\tau_g) = -\frac{\eta_{l,j}\eta_{l,k}\Omega_j\Omega_k \cos(\phi_M^{(j)} - \phi_M^{(k)})}{\mu_l|\mu_l|} \frac{\pi n}{2}. \quad (1.82)$$

Рассмотрим простейший случай кристалла из двух ионов с одинаковыми частотами Раби. Коэффициенты Лэмба-Дике для ионов в любой моде одинаковы по модулю, поэтому можно записать

$$\chi \propto n\pi \left(\frac{\eta\Omega}{2\mu} \right)^2. \quad (1.83)$$

Если обратиться к рис. 2, видно, что коэффициент перепутывания пропорционален площади, заметаемой ионом на фазовой плоскости (n — количество оборотов за время MS-гейта).

При оптимальном соотношении времени гейта и отстройки от частоты колебательной моды оператор, реализующий гейт, имеет вид

$$\hat{U}_{\text{MS}} = \exp\left(2i\chi\hat{\sigma}_\phi^{(1)}\hat{\sigma}_\phi^{(2)}\right). \quad (1.84)$$

Коэффициент 2 появился из суммы $\chi_{12}\hat{\sigma}_\phi^{(1)}\hat{\sigma}_\phi^{(2)} + \chi_{21}\hat{\sigma}_\phi^{(2)}\hat{\sigma}_\phi^{(1)} = 2\chi\hat{\sigma}_\phi^{(1)}\hat{\sigma}_\phi^{(2)}$. Собственные векторы операторов типа $\hat{\sigma}_\phi$ равны

$$|\pm\rangle = \frac{|0\rangle \pm ie^{-i\phi}|1\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (1.85)$$

В стандартных обозначениях состояние $|0\rangle$ лежит выше состояния $|1\rangle$ по энергии. Для удобства дальнейших выкладок поменяем обозначения местами: $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$, тогда состояние $|0\rangle$ выражается через собственные векторы $|\pm\rangle$ как

$$|0\rangle = -ie^{i\phi} \frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (1.86)$$

Тогда результат действия MS-гейта на состояние $|00\rangle$ будет вектором

$$\begin{aligned} \hat{U}_{\text{MS}}|00\rangle &= -\frac{e^{i(\phi_S^{(1)}+\phi_S^{(2)})}}{2}\hat{U}_{\text{MS}}[(|+\rangle - |-\rangle)(|+\rangle - |-\rangle)] = \\ &= -\frac{e^{i(\phi_S^{(1)}+\phi_S^{(2)})}}{2}(e^{2i\chi}|++\rangle - e^{-2i\chi}|+-\rangle - e^{-2i\chi}|-+\rangle + e^{2i\chi}|--\rangle) = \\ &= -\frac{1}{2}\left(e^{2i\chi}e^{i(\phi_S^{(1)}+\phi_S^{(2)})}|11\rangle - e^{2i\chi}|00\rangle - e^{-2i\chi}e^{i(\phi_S^{(1)}+\phi_S^{(2)})}|11\rangle - e^{-2i\chi}|00\rangle\right) = \\ &= \cos(2\chi)|00\rangle - i\sin(2\chi)e^{i(\phi_S^{(1)}+\phi_S^{(2)})}|11\rangle. \end{aligned} \quad (1.87)$$

Фазы базисных векторов в начале импульса можно выбрать произвольно, следовательно, фазовый множитель перед вектором $|11\rangle$ можно положить равным единице и счи-

тать все сдвиги фаз относительно него. Тогда конечное состояние примет вид

$$\hat{U}_{\text{MS}} |00\rangle = \cos(2\chi) |00\rangle - i \sin(2\chi) |11\rangle. \quad (1.88)$$

Максимальная запутанность создается при $2\chi = \pi/4$, в этом случае получаем состояние Белла:

$$|\psi_0\rangle = \frac{|00\rangle - i |11\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (1.89)$$

Из (1.82) видно, что при подходящем соотношении частот Раби и отстройки оптимальное значение реализуется для целого набора n . Наиболее целесообразно выбрать минимально возможное n , чтобы MS-гейт длился наименьшее время. Тогда (при $n = 1$) имеем:

$$-\frac{\eta_{l,j}\eta_{l,k}\Omega_j\Omega_k \cos(\phi_M^{(j)} - \phi_M^{(k)})}{\mu_l|\mu_l|} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}, \quad (1.90)$$

откуда

$$\mu_l^2 = 4\Omega_j\Omega_k \left| \eta_{l,j}\eta_{l,k} \cos(\phi_M^{(j)} - \phi_M^{(k)}) \right|. \quad (1.91)$$

Вернемся к случаю кристалла из двух ионов с одинаковыми частотами Раби. Для MS-гейта, работающего на осевой антисимметричной моде (моде, в которой ионы колеблются в противофазе с одинаковой амплитудой), коэффициенты Лэмба-Дике соотносятся как $\eta_1 = -\eta_2 \equiv \eta$. Тогда для отстройки μ от этой моды получаем оптимальное значение

$$\mu_0 = 2\eta\Omega \sqrt{\cos(\phi_M^{(1)} - \phi_M^{(2)})}, \quad (1.92)$$

а оптимальное время гейта

$$\tau_0 = \frac{\pi}{\eta\Omega \sqrt{\cos(\phi_M^{(1)} - \phi_M^{(2)})}}. \quad (1.93)$$

1.4.4. Измерение достоверности гейта

После завершения квантовой операции важно определить ее достоверность, то есть то, насколько близко итоговое состояние системы к желаемому. Если первое является вектором в гильбертовом пространстве, то эту близость можно характеризовать квадратом модуля скалярного произведения реального и идеального состояний, в соответствии с физическим смыслом амплитуды вероятности в квантовой механике. Поскольку в общем случае электронное состояние нескольких ионов характеризуется матрицей плотности (так как присутствует остаточная запутанность с колебательными состояниями), мерой близости двух состояний будет величина, называемая *степенью совпадения* (fidelity):

$$F(\rho, \rho_0) = \left(\text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho}\rho_0\sqrt{\rho}} \right)^2, \quad (1.94)$$

где ρ и ρ_0 — матрицы плотности реального и идеального состояний. В случае, когда идеальное состояние — вектор, то есть $\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$, выражение упрощается к виду

$$F = \langle\psi_0|\rho|\psi_0\rangle. \quad (1.95)$$

Для двухкубитной операции, рассматриваемой в данной работе, идеальное состояние — максимально перепутанное состояние Белла (1.89). Тогда для достоверности имеем

$$F = \frac{1}{2}(\rho_{00,00} + i\rho_{11,00} - i\rho_{00,11} + \rho_{11,11}) = \frac{p_{00} + p_{11}}{2} + \text{Im } \rho_{00,11}. \quad (1.96)$$

Посредством выбора фазы состояния Белла можно обеспечить максимум данного выражения, давая следующий результат:

$$F = \frac{p_{00} + p_{11}}{2} + |\rho_{00,11}|. \quad (1.97)$$

Таким образом, достоверность зависит от населенностей базисных состояний $|00\rangle$ и $|11\rangle$, а также от модуля недиагонального элемента матрицы плотности.

Зависимость населенности базисных состояний от времени гейта можно установить аналитически и измерить непосредственно детектированием состояния обоих ионов. Как и в предыдущих пунктах, рассматриваем кристалл из двух ионов и MS-гейт, работающий на осевой антисимметричной моде с одинаковыми частотами Раби для каждого иона. Поскольку операторы $\hat{A}_1(\tau)$ и $\hat{A}_2(\tau)$ коммутируют, оператор эволюции запишется следующим образом:

$$\hat{U}(\tau) = \exp(\hat{A}_1(\tau)) \exp(\hat{A}_2(\tau)). \quad (1.98)$$

С учетом $\eta_1 = -\eta_2 \equiv \eta$ оператор $\hat{A}_1(\tau)$ будет иметь вид

$$\hat{A}_1(\tau) = \alpha(\tau) \left(e^{-i\phi_M^{(2)}} \hat{\sigma}_y^{(2)} - e^{-i\phi_M^{(1)}} \hat{\sigma}_y^{(1)} \right) \equiv \alpha(\tau) \hat{S}, \quad (1.99)$$

где

$$\alpha(\tau) = \frac{\eta\Omega(e^{-i\mu\tau} - 1)}{2\mu}, \quad (1.100)$$

а операторы $\hat{\sigma}_\phi$ путем выбора фаз сведены к $\hat{\sigma}_y$. Имеем следующее выражение для оператора эволюции:

$$\hat{U}(\tau) = \hat{D}(\alpha(\tau)\hat{S}) e^{2i\chi(\tau)\hat{\sigma}_y^{(1)}\hat{\sigma}_y^{(2)}}, \quad (1.101)$$

где $\hat{D}(\alpha)$ — оператор смещения на α . Предположим, что начальное состояние системы задается матрицей плотности

$$\rho_i = |00\rangle\langle 00| \otimes \rho_m, \quad (1.102)$$

где ρ_m — матрица плотности теплового состояния гармонического осциллятора со средним значением колебательного квантового числа \bar{n} . Состояние, населенность которого

требуется найти, обозначим $|\psi\rangle$. Тогда имеем следующее равенство:

$$p_\psi = \text{Tr}_m \left(\langle \psi | \hat{U}(|00\rangle\langle 00| \otimes \rho_m) \hat{U}^\dagger | \psi \rangle \right). \quad (1.103)$$

Под Tr_m подразумевается взятие частичного следа по колебательным степеням свободы. Действие оператора \hat{U}_{MS} на состояние $|00\rangle$ было вычислено ранее; обозначим полученный вектор $|\chi\rangle$. Тогда имеем

$$p_\psi = \text{Tr}_m \left(\langle \psi | \hat{D}(\alpha \hat{S}) |\chi\rangle\langle \chi| \rho_m \hat{D}^\dagger(\alpha \hat{S}) | \psi \rangle \right). \quad (1.104)$$

Воспользуемся тем фактом, что

$$\hat{D}(\alpha \hat{S}) = \sum_\lambda \hat{D}(\alpha \lambda) |\lambda\rangle\langle \lambda|, \quad (1.105)$$

где $|\lambda\rangle$ — собственный вектор оператора \hat{S} с собственным значением λ . С учетом этого получим

$$p_\psi = \text{Tr}_m \left(\sum_{\lambda, \lambda'} \langle \psi | \lambda \rangle \langle \lambda | \chi \rangle \langle \chi | \lambda' \rangle \langle \lambda' | \psi \rangle \hat{D}(\alpha \lambda) \rho_m \hat{D}^\dagger(\alpha \lambda') \right). \quad (1.106)$$

Частичный след вычисляется как

$$\begin{aligned} \text{Tr}_m \left(\hat{D}(\alpha \lambda) \rho_m \hat{D}^\dagger(\alpha \lambda') \right) &= \text{Tr}_m \left(\hat{D}^\dagger(\alpha \lambda') \hat{D}(\alpha \lambda) \rho_m \right) = \\ &= \text{Tr}_m \left(\hat{D}(\alpha(\lambda - \lambda')) \rho_m \right) = \sum_n p_n \langle n | \hat{D}(\alpha(\lambda - \lambda')) | n \rangle, \end{aligned} \quad (1.107)$$

где p_n — населенность n -го колебательного состояния. Диагональный матричный элемент оператора смещения выражается через полином Лагерра [33]:

$$\langle n | \hat{D}(\alpha) | n \rangle = e^{-|\alpha|^2/2} L_n(|\alpha|^2). \quad (1.108)$$

Степенной закон распределения p_n позволяет использовать выражение для производящей функции полиномов Лагерра [34]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n(x) = \frac{e^{-tx/(1-t)}}{1-t}. \quad (1.109)$$

С учетом этого искомая сумма равна

$$\frac{e^{-|\alpha(\lambda - \lambda')|^2/2}}{1 + \bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right)^n L_n(|\alpha(\lambda - \lambda')|^2) = \exp \left(-|\alpha|^2 |\lambda - \lambda'|^2 \left(\bar{n} + \frac{1}{2} \right) \right). \quad (1.110)$$

Собственные векторы и собственные значения оператора \hat{S} имеют вид

$$\begin{aligned}
|\lambda_1\rangle &= \frac{|00\rangle + i|01\rangle + i|10\rangle - |11\rangle}{2}, & \lambda_1 &= e^{-i\phi_M^{(1)}} - e^{-i\phi_M^{(2)}}; \\
|\lambda_2\rangle &= \frac{|00\rangle - i|01\rangle + i|10\rangle + |11\rangle}{2}, & \lambda_2 &= e^{-i\phi_M^{(1)}} + e^{-i\phi_M^{(2)}}; \\
|\lambda_3\rangle &= \frac{|00\rangle + i|01\rangle - i|10\rangle + |11\rangle}{2}, & \lambda_3 &= -e^{-i\phi_M^{(1)}} - e^{-i\phi_M^{(2)}}; \\
|\lambda_4\rangle &= \frac{|00\rangle - i|01\rangle - i|10\rangle - |11\rangle}{2}, & \lambda_4 &= -e^{-i\phi_M^{(1)}} + e^{-i\phi_M^{(2)}}.
\end{aligned} \tag{1.111}$$

Подставляя (1.110) и (1.111) в (1.106), получаем после преобразований

$$\begin{aligned}
p_0 \equiv p_{00} &= \frac{1}{16} \left(4 + 8 \cos(4\chi) e^{-4|\alpha|^2(\bar{n}+1/2)} + 2e^{-16|\alpha|^2(1-\cos(\phi_M^{(1)}-\phi_M^{(2)}))^2(\bar{n}+1/2)} + \right. \\
&\quad \left. + 2e^{-16|\alpha|^2 \cos^2(\phi_M^{(1)}-\phi_M^{(2)})(\bar{n}+1/2)} \right). \tag{1.112}
\end{aligned}$$

Во избежание громоздкости опущена зависимость α и χ от времени. Аналогичным образом получаем величину $p_2 \equiv p_{11}$:

$$\begin{aligned}
p_2 &= \frac{1}{16} \left(4 - 8 \cos(4\chi) e^{-4|\alpha|^2(\bar{n}+1/2)} + 2e^{-16|\alpha|^2(1-\cos(\phi_M^{(1)}-\phi_M^{(2)}))^2(\bar{n}+1/2)} + \right. \\
&\quad \left. + 2e^{-16|\alpha|^2 \cos^2(\phi_M^{(1)}-\phi_M^{(2)})(\bar{n}+1/2)} \right). \tag{1.113}
\end{aligned}$$

Помимо населенностей p_0 и p_2 (0 и 2 иона в состоянии $|1\rangle$ соответственно), можно измерить величину $p_1 \equiv p_{01} + p_{10}$ (1 ион в состоянии $|1\rangle$). С учетом нормировки матрицы плотности имеем

$$\begin{aligned}
p_1 &= 1 - (p_0 + p_2) = 1 - \frac{1}{4} \left(2 + e^{-16|\alpha|^2(1-\cos(\phi_M^{(1)}-\phi_M^{(2)}))^2(\bar{n}+1/2)} + \right. \\
&\quad \left. + e^{-16|\alpha|^2 \cos^2(\phi_M^{(1)}-\phi_M^{(2)})(\bar{n}+1/2)} \right). \tag{1.114}
\end{aligned}$$

Зависимость p_0, p_1, p_2 от времени при оптимальных параметрах гейта приведена на рис. 3. Из нее видно, что оптимальное время гейта τ_0 отвечает обращению в ноль вероятности нахождения одного иона в состоянии $|1\rangle$ и уравниванию вероятностей p_0 и p_2 . Данный результат находится в согласии с представлением рассматриваемого в работе состояния Белла (1.89) с одинаковыми весами состояний $|00\rangle$ и $|11\rangle$ и нулевыми весами $|01\rangle$ и $|10\rangle$. На практике для определения величины $p_0 + p_2$, входящей в достоверность гейта (1.97), а также его оптимального времени, измеряют зависимость $p_1(\tau)$ и определяют первое положение минимума; тогда искомая величина будет равна $1 - p_1^{(\min)}$.

Перейдем к методу измерения величины $|\rho_{00,11}|$. Для ее определения к обоим ионам прикладывается анализирующий резонансный лазерный импульс на несущей частоте, причем такой, чтобы его длительность удовлетворяла равенству $\Omega t = \pi/2$, то есть ре-

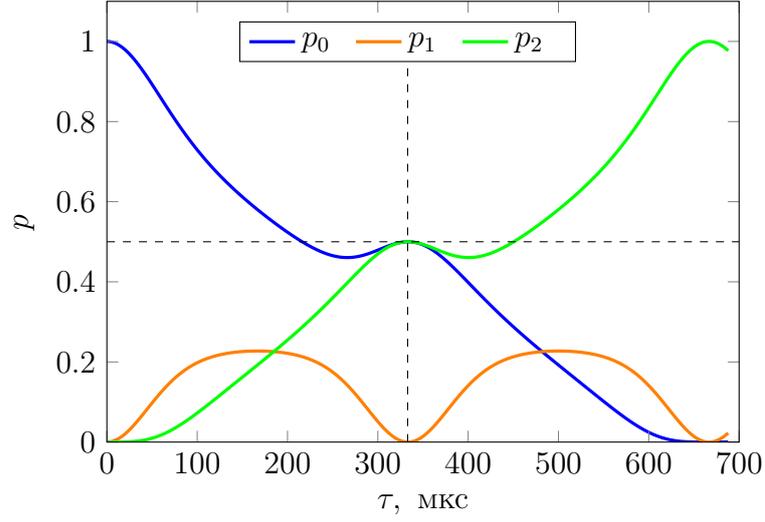


Рис. 3. Зависимости p_0, p_1, p_2 от времени импульса τ . Для построения были взяты численные значения $\eta = 0.15$, $\Omega = 2\pi \cdot 10$ кГц, $\phi_M^{(1)} = \phi_M^{(2)}$, $\bar{n} = 0.1$. Отстройка выбрана оптимальной согласно (1.92). Пунктирными линиями отмечена точка $(\tau_0, 0.5)$, где τ_0 — оптимальное время гейта из (1.93)

лизовывался $\pi/2$ -импульс. Фаза этого импульса варьируется в полном диапазоне углов. Матрица однокубитного гейта, реализующего такое преобразование, запишется в виде

$$\hat{U}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\varphi} \\ -e^{i\varphi} & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.115)$$

где φ — управляемая фаза. Соответственно матрица такого гейта на обоих кубитах будет равной $\hat{U}_a = \hat{U}_1 \otimes \hat{U}_1$. Населенность базисного состояния $|\psi\rangle$ после этого гейта станет равной

$$p_\psi = \langle \psi | \hat{U}_a \rho \hat{U}_a^\dagger | \psi \rangle. \quad (1.116)$$

После приложения анализирующего импульса измеряют величину

$$P(\varphi) = p_{00} + p_{11} - p_{01} - p_{10} \equiv p_0 + p_2 - p_1, \quad (1.117)$$

называемую *четностью* состояния. Покажем, что амплитуда ее колебаний определяется $|\rho_{00,11}|$. Выражение (1.116) можно переписать в виде

$$p_\psi = \langle \hat{U}_a^\dagger \psi | \rho | \hat{U}_a^\dagger \psi \rangle. \quad (1.118)$$

Оператор \hat{U}_a^\dagger преобразует базисные состояния согласно

$$\begin{aligned}
|00\rangle &\rightarrow \frac{|00\rangle + e^{i\varphi}|01\rangle + e^{i\varphi}|10\rangle + e^{2i\varphi}|11\rangle}{2}, \\
|01\rangle &\rightarrow \frac{-e^{-i\varphi}|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle + e^{i\varphi}|11\rangle}{2}, \\
|10\rangle &\rightarrow \frac{-e^{-i\varphi}|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle + e^{i\varphi}|11\rangle}{2}, \\
|11\rangle &\rightarrow \frac{e^{-2i\varphi}|00\rangle - e^{-i\varphi}|01\rangle - e^{-i\varphi}|10\rangle + |11\rangle}{2}.
\end{aligned} \tag{1.119}$$

Подставляя в выражение для p_ψ и для $P(\varphi)$, после преобразований получим

$$\begin{aligned}
P(\varphi) &= \rho_{10,01} + \rho_{01,10} + e^{2i\varphi}\rho_{00,11} + e^{-2i\varphi}\rho_{11,00} = \\
&= 2 \operatorname{Re} \rho_{10,01} + 2|\rho_{00,11}| \cos(2\varphi + \varphi_0), \tag{1.120}
\end{aligned}$$

где φ_0 — фаза недиагонального элемента матрицы плотности. Отсюда видно, что второе слагаемое в выражении (1.97) равно $B/2$, где B — амплитуда колебаний четности.

Таким образом, анализ населенностей базисных состояний и измерение четности позволяет найти достоверность гейта, проводимого в эксперименте, и итоговая формула для ее вычисления имеет вид

$$F = \frac{1 - p_1 + B}{2}, \tag{1.121}$$

где p_1 — вероятность обнаружить 1 ион в состоянии $|1\rangle$ после проведения гейта, а B — амплитуда колебаний четности, измеряемой при помощи анализирующего импульса.

Заметим, что рассматриваемый гейт, хотя и не является гейтом CNOT, входящим в универсальный набор, тем не менее может быть сведен к последнему путем проведения дополнительных однокубитных операций до и после гейта [35].

Ионы иттербия для квантовых вычислений

Настоящая глава посвящена описанию ионов иттербия $^{171}\text{Yb}^+$ как физической платформы для проведения квантовых вычислений. Рассмотрены главные особенности данного иона и механизмы работы с ним.

2.1. Схема уровней иона иттербия-171, оптический кубит

Химический элемент ^{171}Yb — один из стабильных изотопов иттербия, наряду с наиболее часто встречающимися в естественных условиях изотопами с массовыми числами 172, 173, 174 и 176. Его доля в естественной смеси равна 14,3%. Отличительной особенностью изотопа 171 является наличие ненулевого ядерного спина, равного $I = 1/2$, что приводит к сверхтонкому расщеплению термов как в нейтральной иттербии, так и в ионизированном. Стоит отметить, что иттербий-173 также обладает ядерным спином, равным $5/2$, однако его величина достаточно большая, что вызывает расщепление на большее число сверхтонких уровней, приводя к дополнительным трудностям в работе.

Схема используемых в настоящей работе уровней иона $^{171}\text{Yb}^+$ представлена на рис. 4. Сверхтонкое расщепление основного терма $^2S_{1/2}$ равно [36] $\Delta_S = 2\pi \cdot 12.6$ ГГц. Расщепления остальных термов составляют [36–38]

$$\Delta_P = 2\pi \cdot 2.1 \text{ ГГц}, \quad \Delta_D = 2\pi \cdot 0.9 \text{ ГГц}, \quad \Delta_{[3/2]} = 2\pi \cdot 2.2 \text{ ГГц}. \quad (2.1)$$

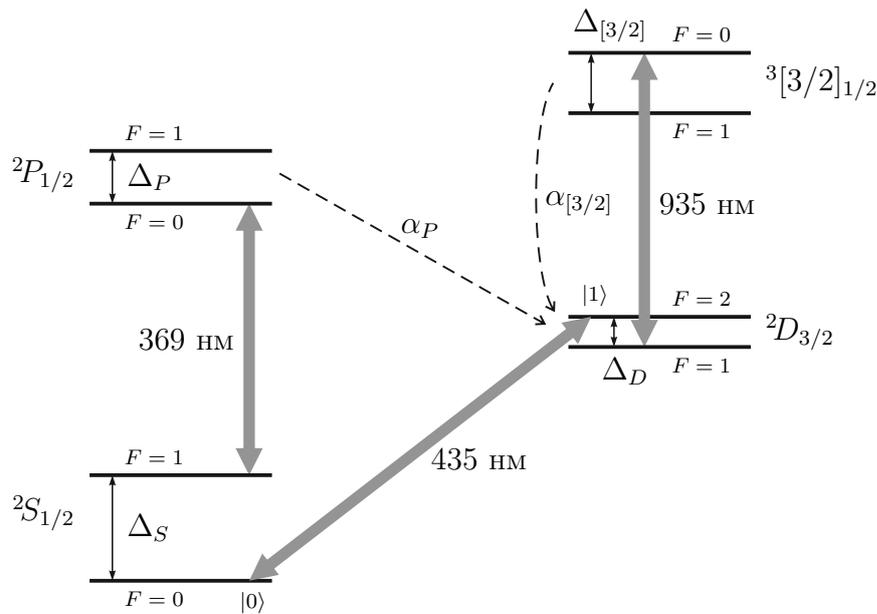


Рис. 4. Схема уровней иона $^{171}\text{Yb}^+$. Пунктирными линиями обозначены наименее вероятные распады с соответствующих уровней с относительными вероятностями α_P и $\alpha_{[3/2]}$, серыми стрелками — основные переходы, используемые в настоящей работе, с указанием длин волн

Ширина терма ${}^2P_{1/2}$ равна [39] $\Gamma_P = 2\pi \cdot 19.6$ МГц. С него возможны два распада: в термы ${}^2S_{1/2}$ и ${}^2D_{3/2}$. Относительная вероятность второго процесса равна $\alpha_P = 0.5\%$. Это означает, что в 0.5 процентах случаев ион, изначально находившийся в терме ${}^2P_{1/2}$, распадется в ${}^2D_{3/2}$. Длина волны перехода ${}^2P_{1/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$ составляет 369 нм; это основной переход в ионе, используемый для охлаждения, подготовки и считывания состояния, о чем пойдет речь далее.

В похожей относительно распадов ситуации находится терм ${}^3[3/2]_{1/2}$. Термы, на которые возможен распад, такие же. Ширина терма равна [40] $\Gamma_{[3/2]} = 2\pi \cdot 4.2$ МГц, относительная вероятность распада в ${}^2D_{3/2}$ равна $\alpha_{[3/2]} = 1.8\%$. Длина волны этого перехода 935 нм.

Последний переход, используемый в работе — собственно кубитный квадрупольный переход ${}^2S_{1/2} \rightarrow {}^2D_{3/2}$, ширина которого [41] $\Gamma_Q = 2\pi \cdot 3.02$ Гц, а длина волны 435 нм. Базисные состояния кубита выбраны следующим образом:

$$|0\rangle = |{}^2S_{1/2}, F = 0\rangle, \quad |1\rangle = |{}^2D_{3/2}, F = 2, m_F = 0\rangle. \quad (2.2)$$

Выбор нулевой магнитной компоненты в качестве состояния $|1\rangle$ обусловлен малой чувствительностью к магнитному полю; нулевая компонента подвержена квадратичному эффекту Зеемана, в то время как остальные — линейному, а повышенная чувствительность к флуктуациям энергии уровня приводит к ухудшению качества проводимых операций. Малая ширина уровня позволяет провести достаточно большое количество гейтов перед тем, как когерентность состояния заметно упадет и/или состояние распадется.

Кубит в ионе иттербия может быть задан не только указанным оптическим переходом. Уровни $|{}^2S_{1/2}, F = 0\rangle$ и $|{}^2S_{1/2}, F = 1\rangle$, разделенные частотным интервалом Δ_S , формируют так называемый микроволновый кубит. Эффективность использования данного кубита была продемонстрирована ранее в работах [42; 43]. Основное преимущество микроволнового перехода перед оптическим в контексте квантовых вычислений состоит в большом времени жизни верхнего состояния (для уровня $|{}^2S_{1/2}, F = 1\rangle$ это время составляет более 15 тысяч лет), что позволяет применять данную пару уровней не только как кубит для проведения квантовых вычислений, но и как ячейку квантовой памяти [44]. Однако имеются и недостатки, обосновывающие выбор в пользу оптического кубита. Индивидуальная адресация ионов при проведении квантовых операций на микроволновых кубитах требует наличия по два взаимно когерентных лазерных пучка на каждый кубит, что, во-первых, вводит дополнительные технические трудности при привязке фазы двух пучков, во-вторых, усложняет масштабирование системы. Адресация иона при работе с оптическим кубитом может быть проведена при помощи единственного лазерного пучка, снимая требования к привязке и облегчая масштабирование системы.

2.2. Охлаждение и перекачка

Для доплеровского охлаждения иона используется переход ${}^2P_{1/2} \leftrightarrow {}^2S_{1/2}$, упомянутый ранее. Его возбуждение осуществляется при помощи лазера, излучающего на длине волны 369 нм. Чтобы повысить эффективность охлаждения и задействовать все сверхтонкие компоненты, между которыми разрешены дипольные переходы, излучение лазера предварительно пропускается через электрооптический модулятор (ЭОМ) с частотой $\Delta_S + \Delta_P = 2\pi \cdot 14.7$ ГГц, создавая две компоненты излучения, связывающие пары уровней $|{}^2P_{1/2}, F=0\rangle \leftrightarrow |{}^2S_{1/2}, F=1\rangle$ и $|{}^2P_{1/2}, F=1\rangle \leftrightarrow |{}^2S_{1/2}, F=0\rangle$ (рис. 5).

Из-за неравенства нулю величины α_P рассматриваемый переход квазициклический: наличие вероятности распада в состояние ${}^2D_{3/2}$, несмотря на ее малость, достаточно быстро приведет к опустошению охлаждающего цикла и накоплению большей части населенности в этом терме, время жизни которого $\tau_Q = 1/\Gamma_Q = 53$ мс, что приведет к резкому уменьшению скорости охлаждения. Для предотвращения такого накопления применяется дополнительный лазер перекачки, излучающий на длине волны 935 нм, резонансной с переходом ${}^2D_{3/2} \leftrightarrow {}^3[3/2]_{1/2}$. Аналогично охлаждающему лазеру, пучок перекачки пропускается через ЭОМ с частотой $\Delta_D + \Delta_{[3/2]} = 2\pi \cdot 3.1$ ГГц для включения в перекачку всех сверхтонких компонент.

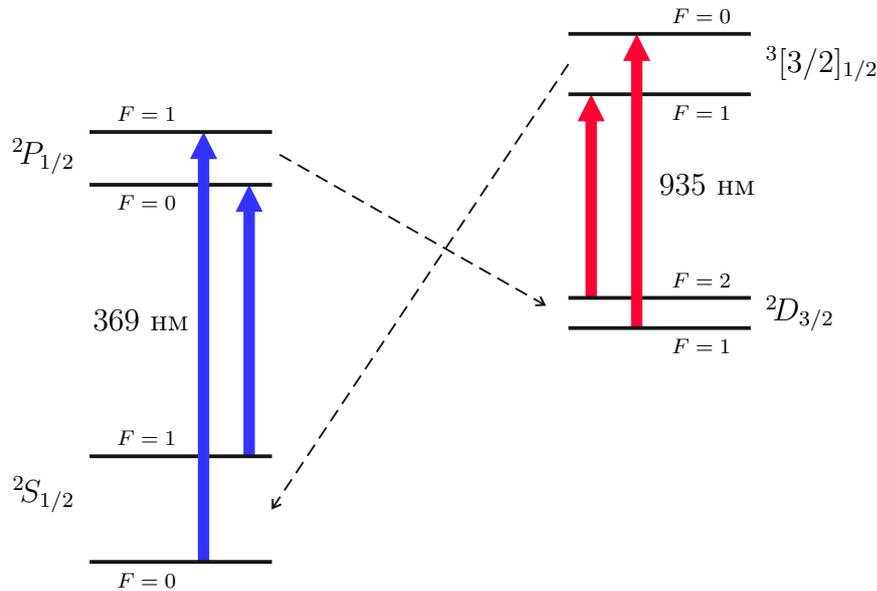


Рис. 5. Схема доплеровского охлаждения иона ${}^{171}\text{Yb}^+$. Синие стрелки обозначают частотные компоненты основного охлаждающего лазера, красные — лазера перекачки. Пунктиром обозначены распады, замыкающие охлаждающий цикл

Минимальная температура кристалла после доплеровского охлаждения (приблизительно равная доплеровскому пределу) все еще слишком большая, чтобы проводимые операции имели достаточную достоверность, поэтому требуется дополнительно охладить кристалл ближе к основному колебательному состоянию. Для этого применяется метод охлаждения на боковых частотах. В предыдущей главе было показано, что отстройка лазера от кубитного перехода (в данном случае на длине волны 435 нм) вниз на

одну секулярную частоту ловушки (в интересующей нас моде) приводит к возбуждению переходов $|0, n\rangle \rightarrow |1, n-1\rangle$, то есть при таком переходе у кристалла отнимается один колебательный квант моды. Кристалл, находящийся в верхнем состоянии $|1, n-1\rangle$, через некоторое время распадается в электронное состояние $|0\rangle$. Колебательное состояние при этом с большой (в режиме Лэмба-Дике) вероятностью не меняется, оставаясь с числом квантов $n-1$. Это происходит из-за того, что вероятность распада с изменением колебательного числа на единицу в η^2 раз отличается от вероятности распада без его изменения (см. формулу (1.59)). Таким образом, по завершению одного цикла возбуждения и распада эффективно происходит переход $|0, n\rangle \rightarrow |0, n-1\rangle$, уменьшая количество квантов колебаний на единицу. Повторяя данный процесс необходимое количество раз (сама структура процесса охлаждения может быть устроена более сложным образом из-за наличия других мод, которые тоже необходимо охлаждать), можно уменьшить среднее колебательное число в релевантной моде практически до нуля.

2.3. Подготовка и считывание состояния

Перед началом операций все кубиты должны быть инициализированы в одном из базисных состояний. В данной работе начальным состоянием выбрано состояние $|0\rangle$. Чтобы перевести в него каждый ион в кристалле, используется метод оптической накачки. К ионам прикладывается излучение, связывающее состояния $|^2S_{1/2}, F=1\rangle$ и $|^2P_{1/2}, F=1\rangle$. Если ион изначально находился в состоянии $|^2S_{1/2}, F=1\rangle$, то излучение будет переводить населенность из это состояния в $|^2P_{1/2}, F=1\rangle$, откуда уже возможны два пути распада (без учета величины α_P): обратно в $|^2S_{1/2}, F=1\rangle$ и в $|^2S_{1/2}, F=0\rangle$, из второго состояния переходов уже не будет вследствие большого отличия частоты перехода от частоты лазера. Таким образом, начальная населенность, распределенная произвольным образом между состояниями $|^2S_{1/2}, F=0, 1\rangle$, через время порядка нескольких обратных ширин перехода $^2S_{1/2} \leftrightarrow ^2P_{1/2}$ перейдет в базисное состояние $|0\rangle$. Осуществить накачку можно путем следующей модификации системы охлаждения: помимо ЭОМа с частотой 14.7 ГГц, вводится дополнительный ЭОМ с частотой, совпадающей с расщеплением P -терма $\Delta_P = 2\pi \cdot 2.1$ ГГц. На время подготовки состояния первый ЭОМ выключается, а второй включается. Поскольку основная частота лазера с длиной волны 369 нм настроена в резонанс с переходом $|^2S_{1/2}, F=1\rangle \leftrightarrow |^2P_{1/2}, F=0\rangle$, возникает требуемая для накачки частотная компонента (рис. 6, а). Основная частота при помощи ЭОМа устранена быть не может, но она не влияет отрицательным образом на накачку, потому что не задействует состояние $|0\rangle$ ни в каком из резонансных переходов. Лазер перекачки во время подготовки состояния действует прежним образом.

Процедура детектирования состояния иона заключается в проецировании этого состояния на вычислительный базис $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ путем излучения, вызывающего различный отклик в зависимости от того, в каком из базисных состояний находился ион. Реализация схемы детектирования в настоящей работе, как и в большинстве других,

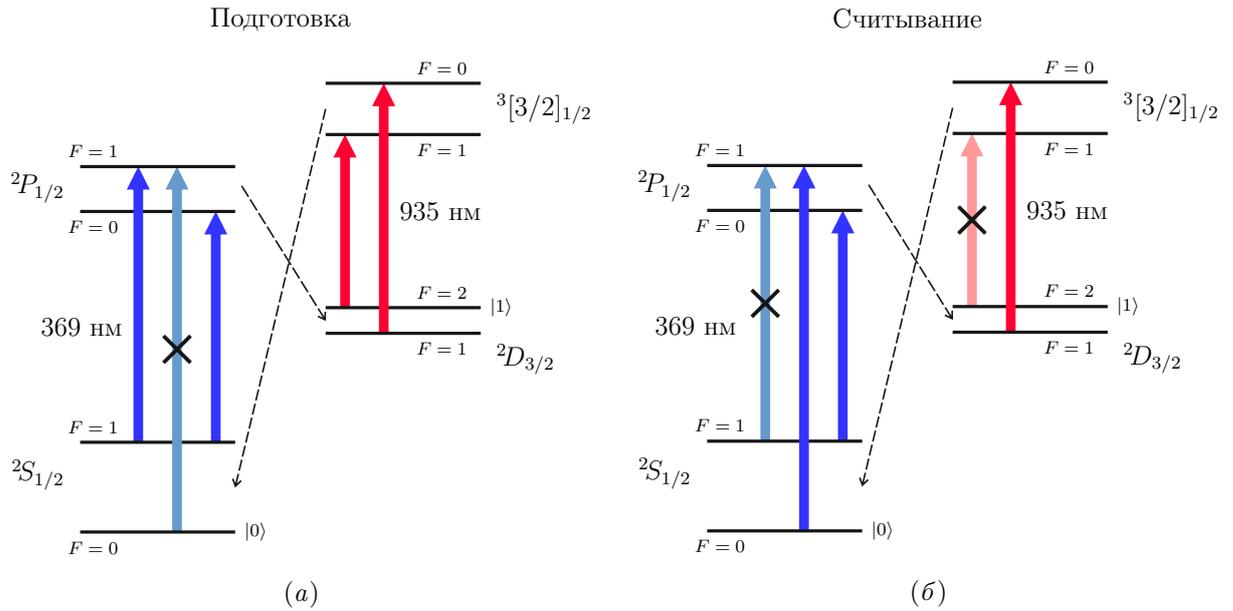


Рис. 6. Схемы подготовки состояния (а) и его детектирования (б). Крестиком отмечены частотные компоненты лазеров, не используемые в соответствующих схемах

производится при помощи метода квантовых скачков. Ион подвергается воздействию лазерной системы охлаждения, в которой дополнительная компонента лазера перекачки, затрагивающая состояния $|^2D_{3/2}, F = 2\rangle$, отсутствует (рис. 6, б). Добиться этого можно, отключив ЭОМ перекачивающего лазера, работающий на частоте 3.1 ГГц. Если ион находился в состоянии $|0\rangle$, то при таком излучении он начнет интенсивно рассеивать фотоны, которые, в свою очередь, собираются оптической системой детектирования и отсчитываются фотоэлектронным умножителем (ФЭУ). Если же ион находился в состоянии $|1\rangle$, то, в силу отсутствия резонансных переходов, индуцируемых из этого состояния лазерной системой, рассеяния фотонов в идеальном случае происходить не будет. Таким образом, по числу собранных за время детектирования фотонов можно судить о начальном состоянии иона. Естественно, во всех промежуточных случаях каждый результат детектирования будет возникать с некоторой вероятностью, равной соответствующей вероятности нахождения иона в том или ином базисном состоянии. Поэтому для набора статистики детектирование проводится достаточно большое количество раз.

Оптимизация достоверности считывания состояния иона

В предыдущей главе была описана схема считывания состояния одиночного иона иттербия, основанная на том факте, что ион, находящийся в различных базисных состояниях, по-разному рассеивает фотоны внешнего излучения. В идеальном случае, когда вкладом засветки и нерезонансными эффектами можно пренебречь, рассеяние фотонов происходит только в одном из базисных состояний. Однако при учете этих эффектов возникает некоторая вероятность ошибочной классификации «темного» состояния (того, в котором ион не должен рассеивать фотоны) за «светлое» (соответственно второе состояние). На практике для учета шума и других эффектов используется специальная величина, называемая *дискриминатором* D . Это натуральное число, являющееся пороговым значением количества собранных фотонов: если за время детектирования это количество не превышает D , то состояние классифицируется как темное, в противном случае — как светлое. Соответственно в идеальном случае, когда темное состояние не рассеивает фотонов вообще, оптимальное значение дискриминатора, очевидно, равно нулю. Если же это значение больше нуля, то даже находясь в светлом состоянии, ион может рассеять меньшее количество фотонов из-за дисперсии их распределения, которая всегда имеет место, следовательно, вызывая ошибочную классификацию уже светлого состояния за темное. Наконец, нерезонансные взаимодействия с детектирующим излучением могут вызывать переходы из одного базисного состояния в другое в самом ионе, также внося погрешность в процесс считывания.

Данная глава посвящена аналитическому рассмотрению процесса детектирования с учетом засветки и нерезонансных эффектов. Выведена формула для достоверностей считывания светлого и темного состояний в зависимости от параметров эксперимента, а также проведена численная оптимизация в терминах выбора наилучшего времени детектирования и дискриминатора.

3.1. Теоретическая модель

Вернемся к схеме детектирования, на этот раз явно указав дипольно разрешенные спонтанные переходы (рис. 7). Для краткости будем обозначать сверхтонкие компоненты термов символом $L(F)$, где L и F взяты из их стандартных обозначений. Пусть сначала ион находится в состоянии $S(0) \equiv |0\rangle$. Поскольку $\alpha_P \ll 1$, можно разделить динамику населенностей на два этапа: локальное равновесие в системе уровней $S(0), S(1), P(0), P(1)$ и последующее (более медленное) перераспределение во всем наборе термов. На первом этапе происходит практически полный перенос населенности из состояния $S(0)$ в состояния $S(1)$ и $P(0)$. Действительно, эта пара уровней замкнута

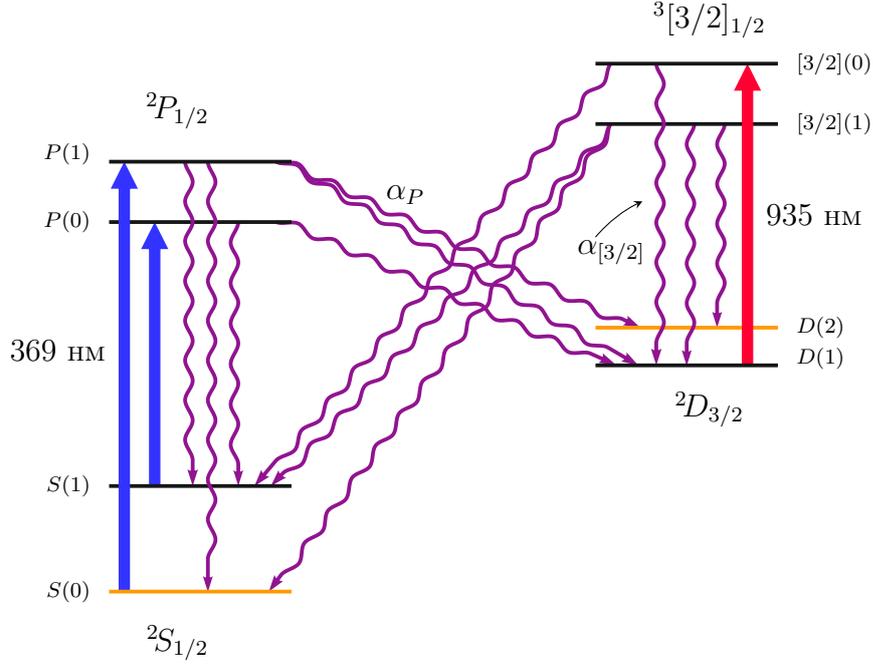


Рис. 7. Подробная схема считывания состояния одиночного кубита. Волнистые линии указывают разрешенные спонтанные переходы. Оранжевым цветом обозначены детектируемые состояния

относительно ухода населенности **из** нее в том смысле, что общая населенность данных уровней может только увеличиваться, но не уменьшаться, в силу правила запрета перехода между состояниями $P(0)$ и $S(0)$ с нулевыми значениями момента. Любая же ненулевая суммарная населенность остальных двух состояний будет уменьшаться за счет перехода $P(1) \rightarrow S(1)$.

Состояние $D(2)$ может во время первого этапа заселиться за счет распадов с $P(1)$. Предположим, что все когерентные эффекты пренебрежимо малы. Тогда применимо рассмотрение в формализме скоростных уравнений. В частности, можно использовать вероятности спонтанных переходов $F \rightarrow F'$ интегрально, без учета магнитных подуровней. Согласно [45], эти вероятности выражаются через вероятности переходов $J \rightarrow J'$ как

$$\Gamma_{FF'} = (2F' + 1)(2J + 1) \begin{Bmatrix} J & F & I \\ F' & J' & 1 \end{Bmatrix}^2 \Gamma_{JJ'}, \quad (3.1)$$

где $I = 1/2$. С учетом этого, вероятность оказаться в темном состоянии $D(2)$ будет равна

$$p_{bd} = \frac{5}{6} \alpha_P \Gamma_P \int_0^{+\infty} \rho_{P(1)}(t) dt, \quad (3.2)$$

где под $\rho_{L(F)}$ здесь и в дальнейшем подразумевается населенность уровня $L(F)$. В начале и в конце первого этапа, как следует из вышесказанного, величина $\rho_{P(1)}$ равна нулю, поэтому выражение выше имеет конечное значение. Чтобы его вычислить, достаточно

записать уравнение для суммарной населенности уровней $S(0)$ и $P(1)$:

$$\dot{\rho}_{P(1)} + \dot{\rho}_{S(0)} = -\frac{2}{3}\Gamma_P \rho_{P(1)}. \quad (3.3)$$

Здесь в главном порядке пренебрегается всеми переходами, затрагивающими термы D и $[3/2]$, а также нерезонансными эффектами. Такое приближение справедливо, если характерное время установления равновесной населенности в системе термов S и P намного меньше аналогичного времени для полной системы. В данном случае это условие эквивалентно требованию достаточно большой интенсивности охлаждающего лазера (точнее, как минимум сравнимости с единицей его параметра насыщения, что, как правило, выполняется в реальности).

Проинтегрировав последнее уравнение по времени с учетом граничных условий $\rho_{P(1)}(0) = \rho_{P(1)}(+\infty) = \rho_{S(0)}(+\infty) = 0$, $\rho_{S(0)}(0) = 1$, получим

$$-1 = -\frac{2}{3}\Gamma_P \int_0^{+\infty} \rho_{P(1)}(t) dt, \quad (3.4)$$

откуда

$$p_{bd} = \frac{5}{4}\alpha_P. \quad (3.5)$$

Второй этап процесса состоит в распределении населенностей в полной системе. Если пренебречь в главном порядке нерезонансными переходами, то, с учетом возможных переходов между различными сверхтонкими компонентами, получим, что подсистема уровней $S(1)$, $P(0)$, $D(1)$ и $[3/2](0)$ замкнута относительно охлаждающего и перекачивающего излучений, что позволяет записать скоростные уравнения только для нее:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{S(1)} &= \Gamma_{UV} \left(\rho_{P(0)} - \frac{\rho_{S(1)}}{3} \right) + (1 - \alpha_P)\Gamma_P \rho_{P(0)} + (1 - \alpha_{[3/2]})\Gamma_{[3/2]}\rho_{[3/2](0)}; \\ \dot{\rho}_{P(0)} &= \Gamma_{UV} \left(\frac{\rho_{S(1)}}{3} - \rho_{P(0)} \right) - \Gamma_P \rho_{P(0)}; \\ \dot{\rho}_{D(1)} &= \Gamma_{IR} \left(\rho_{[3/2](0)} - \frac{\rho_{D(1)}}{3} \right) + \alpha_P \Gamma_P \rho_{P(0)} + \alpha_{[3/2]}\Gamma_{[3/2]}\rho_{[3/2](0)}; \\ \dot{\rho}_{[3/2](0)} &= \Gamma_{IR} \left(\frac{\rho_{D(1)}}{3} - \rho_{[3/2](0)} \right) - \Gamma_{[3/2]}\rho_{[3/2](0)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Коэффициенты $1/3$ учитывают статвеса состояний с $F = 1$. В данных уравнениях скорости накачки Γ_{UV} и Γ_{IR} определяются следующими формулами:

$$\Gamma_{UV} = \Gamma_P \frac{s_{UV}}{3} \frac{(\Gamma_P/2)^2}{(\Gamma_P/2)^2 + \delta_{UV}^2}, \quad (3.7)$$

$$\Gamma_{IR} = \alpha_{[3/2]}\Gamma_{[3/2]} \frac{s_{IR}}{3} \frac{(\Gamma_{[3/2]}/2)^2}{(\Gamma_{[3/2]}/2)^2 + \delta_{IR}^2}. \quad (3.8)$$

Коэффициент 3 присутствует в предположении о равномерности распределения интенсивности всех лазеров по поляризациям. Величины δ_{UV} , δ_{IR} — отстройки охлаждающего

и перекачивающего пучков от центра линии, а s_{UV}, s_{IR} — их параметры насыщения соответственно. Под параметром насыщения понимается величина, рассчитываемая по стандартной формуле

$$s = \frac{I}{I_{\text{sat}}} = \frac{I}{2\pi\hbar c\Gamma/(3\lambda^3)}, \quad (3.9)$$

где I — интенсивность излучения, Γ — ширина верхнего уровня, λ — длина волны возбуждаемого перехода.

В равновесии при нулевых отстройках решение системы для уровней $S(1)$ и $D(1)$, в приближении $\alpha_P, \alpha_{[3/2]} \ll 1$, имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_{S(1)} &= \frac{9 + 3s_{UV}}{9 + 4s_{UV} + \varepsilon}, \\ \rho_{D(1)} &= \frac{\varepsilon}{9 + 4s_{UV} + \varepsilon}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где ε — поправка на перекачивающее излучение, равная

$$\varepsilon = 9 \frac{\alpha_P}{\alpha_{[3/2]}} \frac{\Gamma_P}{\Gamma_{[3/2]}} \frac{s_{UV}}{s_{IR}}. \quad (3.11)$$

Из-за нерезонансного заполнения уровней $P(1)$ и $[3/2](1)$ возникает «утечка» населенности из светлого состояния в темное со скоростью, равной

$$\gamma_b = \frac{5}{6} (\alpha_P \Gamma_P \rho_{P(1)} + \alpha_{[3/2]} \Gamma_{[3/2]} \rho_{[3/2](1)}). \quad (3.12)$$

Населенности данных уровней можно найти из соответствующих скоростных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{P(1)} &= \frac{2\tilde{\Gamma}_{UV}}{3} (\rho_{S(1)} - \rho_{P(1)}) - \Gamma_P \rho_{P(1)}, \\ \dot{\rho}_{[3/2](1)} &= \frac{\tilde{\Gamma}_{IR}}{6} (\rho_{D(1)} - \rho_{[3/2](1)}) - \Gamma_{[3/2]} \rho_{[3/2](1)}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где модифицированные скорости накачки $\tilde{\Gamma}_{UV}$ и $\tilde{\Gamma}_{IR}$ можно получить из формул (3.7) и (3.8) соответственно с учетом $\Delta_P \gg \Gamma_P$, $\Delta_{[3/2]} \gg \Gamma_{[3/2]}$:

$$\tilde{\Gamma}_{UV} = \frac{\Gamma_P s_{UV}}{3} \left(\frac{\Gamma_P}{2\Delta_P} \right)^2, \quad \tilde{\Gamma}_{IR} = \frac{\alpha_{[3/2]} \Gamma_{[3/2]} s_{IR}}{3} \left(\frac{\Gamma_{[3/2]}}{2\Delta_{[3/2]}} \right)^2. \quad (3.14)$$

В приближении $\rho_{P(1)} \ll \rho_{S(1)}$, $\rho_{[3/2](1)} \ll \rho_{D(1)}$ при подстановке решения системы получим требуемые населенности:

$$\begin{aligned} \rho_{P(1)} &= \frac{2s_{UV}}{9} \left(\frac{\Gamma_P}{2\Delta_P} \right)^2 \frac{9 + 3s_{UV}}{9 + 4s_{UV} + \varepsilon}, \\ \rho_{[3/2](1)} &= \frac{\alpha_{[3/2]} s_{IR}}{18} \left(\frac{\Gamma_{[3/2]}}{2\Delta_{[3/2]}} \right)^2 \frac{\varepsilon}{9 + 4s_{UV} + \varepsilon}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

а отсюда и скорость утечки:

$$\gamma_b = \frac{5}{6} \frac{\alpha_P \Gamma_P s_{UV}}{9 + 4s_{UV} + \varepsilon} \left[\frac{2(3 + s_{UV})}{3} \left(\frac{\Gamma_P}{2\Delta_P} \right)^2 + \frac{\alpha_{[3/2]}}{2} \left(\frac{\Gamma_{[3/2]}}{2\Delta_{[3/2]}} \right)^2 \right]. \quad (3.16)$$

Теперь пусть ион изначально находится в темном состоянии $D(2)$. Утечка в светлое состояние происходит двумя путями. Первый — прямой квадрупольный переход в терм S , происходящий со скоростью Γ_Q . Второй — нерезонансное заселение состояния $[3/2](1)$ и последующий распад также в терм S . Относительная вероятность этого распада близка к единице, поэтому можно не учитывать поправку на обратный спонтанный переход $[3/2](1) \rightarrow D(2)$. Тогда скорость утечки из темного состояния через промежуточное, с учетом $\Delta_D, \Delta_{[3/2]} \gg \Gamma_{[3/2]}$, будет равна

$$\frac{\alpha_{[3/2]} \Gamma_{[3/2]} s_{IR}}{6} \left(\frac{\Gamma_{[3/2]}}{2(\Delta_D + \Delta_{[3/2]})} \right)^2, \quad (3.17)$$

а общая скорость утечки, соответственно,

$$\gamma_d = \Gamma_Q + \frac{\alpha_{[3/2]} \Gamma_{[3/2]} s_{IR}}{6} \left(\frac{\Gamma_{[3/2]}}{2(\Delta_D + \Delta_{[3/2]})} \right)^2. \quad (3.18)$$

Найдем статистику фотонов для нашей системы с учетом утечек. Обозначим время детектирования τ , а полную эффективность сбора фотонов (отношение числа задетектированных фотонов к числу излученных ионом) — η . Пренебрежем процессами многократных переходов между темным и светлым состояниями, то есть будем считать, что если в какой-то момент произошла утечка в какое-либо состояние, то ион остается в нем до конца времени τ . Тогда вывод повторяет (с небольшими модификациями) выкладки, проведенные в [46], и представлен ниже.

Ион, изначально находившийся в темном состоянии, по экспоненциальному закону уходит из него со скоростью γ_d . То есть в момент времени t вероятность распасться в светлое состояние равна

$$f_d(t) dt = \gamma_d e^{-\gamma_d t} dt. \quad (3.19)$$

Статистика детектируемых фотонов, излученных ионом, принимается пуассоновской со средним $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) = (1 - t/\tau)\lambda_0, \quad (3.20)$$

где λ_0 — среднее количество фотонов, собранное на детекторе, в случае, когда ион находится в светлом состоянии все время τ . Линейная модель предполагает, что τ много больше характерного установления равновесия населенностей, так что скорость рассеяния фотонов можно считать постоянной. Выражая дифференциал времени распада

через дифференциал среднего числа фотонов, получаем распределение по λ :

$$g_d(\lambda) = f_d(t(\lambda)) \left| \frac{dt}{d\lambda} \right| = \alpha_d e^{\alpha_d(\lambda-\lambda_0)}, \quad (3.21)$$

где $\alpha_d = \gamma_d \tau / \lambda_0$. Статистика фотонов получится сверткой с распределением Пуассона $p_\lambda(n) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}$. Помимо этого, необходимо учесть конечность вероятности остаться в темном состоянии в конце времени детектирования. Эта вероятность равна $e^{-\alpha_d \lambda_0}$ и вносит вклад в статистику фотонов на значении $n = 0$. Получаем выражение

$$p_d(n) = e^{-\alpha_d \lambda_0} \delta_n + \alpha_d \int_0^{\lambda_0} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} e^{\alpha_d(\lambda-\lambda_0)} d\lambda. \quad (3.22)$$

Интеграл во втором слагаемом можно переписать в виде

$$\int_0^{\lambda_0} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} e^{\alpha_d(\lambda-\lambda_0)} d\lambda = \frac{e^{-\alpha_d \lambda_0}}{((n+1)-1)!} \int_0^{(1-\alpha_d)\lambda_0} \frac{t^{(n+1)-1} e^{-t}}{(1-\alpha_d)^{n+1}} dt. \quad (3.23)$$

Используя определение регуляризованной нижней неполной гамма-функции

$$I(z, a) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^a t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (3.24)$$

получим для статистики фотонов в темном состоянии

$$p_d(n) = e^{-\alpha_d \lambda_0} \left[\delta_n + \frac{\alpha_d}{(1-\alpha_d)^{n+1}} I(n+1, (1-\alpha_d)\lambda_0) \right]. \quad (3.25)$$

Аналогичное рассмотрение для старта из светлого состояния приводит к статистике

$$p_b(n) = \frac{e^{-(1+\alpha_b)\lambda_0} \lambda_0^n}{n!} + \frac{\alpha_b}{(1+\alpha_b)^{n+1}} I(n+1, (1+\alpha_b)\lambda_0), \quad (3.26)$$

где $\alpha_b = \gamma_b \tau / \lambda_0$. Однако, как было установлено выше, первый этап динамики населенности в этом случае приводит к ненулевой вероятности оказаться в темном состоянии (см. (3.5)). На масштабе времени τ этот процесс означает эффективный старт из темного состояния с вероятностью p_{bd} , статистика фотонов для которого уже найдена. Тогда модифицированная с учетом первичной утечки статистика примет вид

$$p_b(n) = p_{bd} p_d(n) + (1 - p_{bd}) \left[\frac{e^{-(1+\alpha_b)\lambda_0} \lambda_0^n}{n!} + \frac{\alpha_b}{(1+\alpha_b)^{n+1}} I(n+1, (1+\alpha_b)\lambda_0) \right]. \quad (3.27)$$

Теперь учтем эффекты засветки. Статистику этих фотонов также считаем пуассоновской со средним $\lambda_{ДС}$. Поскольку приходы фотонов сигнала и засветки независимы друг

от друга, результирующая статистика будет сверткой:

$$p'_{b/d}(n) = \sum_{m=0}^n p_{b/d}(m) \frac{e^{-\lambda_{\text{DC}}} \lambda_{\text{DC}}^{n-m}}{(n-m)!}. \quad (3.28)$$

Чтобы вычислить эту свертку для темного состояния, вернемся к выражению (3.22). Используя наличие распределения Пуассона в подынтегральной функции и тот факт, что свертка двух распределений Пуассона дает такое же распределение с суммарным средним, получим для статистики

$$p'_d(n) = \frac{e^{-(\alpha_d \lambda_0 + \lambda_{\text{DC}})} \lambda_{\text{DC}}^n}{n!} + \alpha_d \int_0^{\lambda_0} \frac{e^{-(\lambda + \lambda_{\text{DC}})} (\lambda + \lambda_{\text{DC}})^n}{n!} e^{\alpha_d(\lambda - \lambda_0)} d\lambda. \quad (3.29)$$

Замена $t = (1 - \alpha_d)(\lambda + \lambda_{\text{DC}})$ приводит после преобразований, аналогичных проведенным ранее при вычислении $p_d(n)$, к результату для темного состояния:

$$p'_d(n) = e^{-\alpha_d \lambda_0} \left\{ \frac{e^{-\lambda_{\text{DC}}} \lambda_{\text{DC}}^n}{n!} + \frac{\alpha_d e^{-\alpha_d \lambda_{\text{DC}}}}{(1 - \alpha_d)^{n+1}} [Q(n+1, (1 - \alpha_d)\lambda_{\text{DC}}) - Q(n+1, (1 - \alpha_d)(\lambda_{\text{DC}} + \lambda_0))] \right\}, \quad (3.30)$$

где Q — регуляризованная верхняя неполная гамма-функция

$$Q(z, a) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_a^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (3.31)$$

Статистика для светлого состояния получается аналогичными действиями:

$$p'_b(n) = p_{bd} p'_d(n) + (1 - p_{bd}) \left\{ \frac{e^{-(1+\alpha_b)\lambda_0 - \lambda_{\text{DC}}} (\lambda_{\text{DC}} + \lambda_0)^n}{n!} + \frac{\alpha_b e^{\alpha_b \lambda_{\text{DC}}}}{(1 + \alpha_b)^{n+1}} [Q(n+1, (1 + \alpha_b)\lambda_{\text{DC}}) - Q(n+1, (1 + \alpha_b)(\lambda_{\text{DC}} + \lambda_0))] \right\}. \quad (3.32)$$

Для наглядной демонстрации данной статистики на рис. 8 приведены примеры гистограмм отсчетов фотонов для светлого и темного состояний, рассчитанные по формулам (3.30) и (3.32).

Достоверность считывания темного состояния, как следует из указанного в начале главы, равна суммарной вероятности отсчета количества фотонов, меньшего или равного дискриминатору D :

$$F_d = \sum_{n=0}^D p'_d(n). \quad (3.33)$$

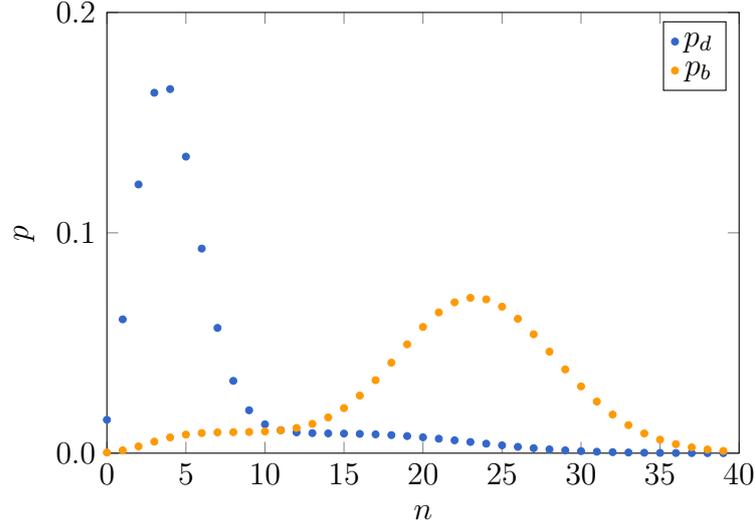


Рис. 8. Статистика фотонов для темного и светлого состояний. При построении взяты значения $\alpha_b = \alpha_d = 10^{-2}$, $\lambda_0 = 20$, $\lambda_{DC} = 4$. Видны пики на значениях λ_{DC} и $\lambda_{DC} + \lambda_0$, а также протяженные пьедесталы, связанные с утечками

Аналогичная формула достоверности для светлого состояния:

$$F_b = 1 - \sum_{n=0}^D p'_b(n). \quad (3.34)$$

Для расчета данных сумм в замкнутой форме необходимо вычислить сумму вида

$$\sum_{n=0}^D \frac{Q(n+1, a)}{b^n}. \quad (3.35)$$

Воспользуемся следующим тождеством:

$$Q(n+1, a) = \sum_{m=0}^n \frac{e^{-a} a^m}{m!}. \quad (3.36)$$

Подставим ее в сумму по n и поменяем местами порядок суммирования (с соответствующей заменой пределов):

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^D \frac{Q(n+1, a)}{b^n} &= \sum_{m=0}^D \sum_{n=m}^D \frac{e^{-a} a^m}{b^n m!} = \frac{1}{b-1} \sum_{m=0}^D \frac{e^{-a} a^m}{m!} \left(\frac{b}{b^m} - \frac{1}{b^D} \right) = \\ &= \frac{b e^{-a+a/b}}{b-1} Q(D+1, a/b) - \frac{1}{b^D(b-1)} Q(D+1, a). \end{aligned} \quad (3.37)$$

В последнем равенстве тождество (3.36) использовано в обратную сторону. Применяя

этот результат к выражению (3.30), получим после преобразований

$$F_d = Q(D + 1, \lambda_{\text{DC}} + \lambda_0) + \frac{e^{-\alpha_d(\lambda_{\text{DC}} + \lambda_0)}}{(1 - \alpha_d)^{D+1}} [Q(D + 1, (1 - \alpha_d)\lambda_{\text{DC}}) - Q(D + 1, (1 - \alpha_d)(\lambda_{\text{DC}} + \lambda_0))]. \quad (3.38)$$

Для выражения (3.32) результат аналогичный:

$$F_b = 1 - p_{bd}F_d - (1 - p_{bd}) \left\{ Q(D + 1, \lambda_{\text{DC}}) - \frac{e^{\alpha_b\lambda_{\text{DC}}}}{(1 + \alpha_b)^{D+1}} [Q(D + 1, (1 + \alpha_b)\lambda_{\text{DC}}) - Q(D + 1, (1 + \alpha_b)(\lambda_{\text{DC}} + \lambda_0))] \right\}. \quad (3.39)$$

3.2. Численная оптимизация параметров считывания

Для дальнейшей оптимизации выражений (3.38) и (3.39) необходимо вычислить значения $\lambda_0, \lambda_{\text{DC}}, \alpha_d, \alpha_b$. Среднее количество задетектированных фотонов пропорционально населенности уровня $P(0)$, которую можно найти из решения системы скоростных уравнений, рассмотренных ранее:

$$\lambda_0 = \eta\tau\Gamma_P\rho_{P(0)} = \eta\tau\Gamma_P\frac{s_{\text{UV}}}{9 + 4s_{\text{UV}} + \varepsilon}. \quad (3.40)$$

Отсюда, подставляя (3.16) и (3.18), находим α_b и α_d :

$$\alpha_b = \frac{5}{6} \frac{\alpha_P}{\eta} \left[\frac{2(3 + s_{\text{UV}})}{3} \left(\frac{\Gamma_P}{2\Delta_P} \right)^2 + \frac{\alpha_{[3/2]}}{2} \left(\frac{\Gamma_{[3/2]}}{2\Delta_{[3/2]}} \right)^2 \right], \quad (3.41)$$

$$\alpha_d = \frac{9 + 4s_{\text{UV}} + \varepsilon}{\eta\Gamma_P s_{\text{UV}}} \left[\Gamma_Q + \frac{\alpha_{[3/2]}\Gamma_{[3/2]}s_{\text{IR}}}{6} \left(\frac{\Gamma_{[3/2]}}{2(\Delta_D + \Delta_{[3/2]})} \right)^2 \right]. \quad (3.42)$$

Величину λ_{DC} выразим через λ_0 , введя коэффициент засветки $N = \lambda_{\text{DC}}/\lambda_0$. Этот коэффициент не зависит от других параметров, таких как τ и η , поскольку оба количества фотонов пропорциональны времени детектирования, а отношение эффективностей сбора фотонов иона и засветки можно считать постоянным и не зависящим от η . Следовательно, его можно использовать как дополнительный параметр при оптимизации.

Как правило, в эксперименте значения η и N можно считать фиксированными, поскольку они задаются устройством установки и зависят от характеристик оптических элементов и от степени изоляции от засветок, то есть варьировать эти величины довольно затруднительно. Помимо этого, параметры насыщения лазерных пучков s_{UV} и s_{IR} , будучи достаточно большими (не сильно меньше единицы), не влияют заметным образом на достоверность считывания, поэтому примем их также постоянными и равными единице. Оставшиеся два параметра, τ и D , наоборот, могут варьироваться

в широком диапазоне, поэтому относительно них и будет проводиться оптимизация. Полная достоверность считывания равна минимальной из двух достоверностей (3.38) и (3.39), а в силу монотонной зависимости каждой из них от времени детектирования при фиксированном D (F_d уменьшается при увеличении τ , а F_b увеличивается в силу роста λ_0 и λ_{DC}) оптимум достигается при их равенстве: $F_d = F_b$. Поскольку τ непрерывная переменная, а D — дискретная, легче всего решить это уравнение относительно τ при фиксированном D , а потом минимизировать полученную ошибку считывания (уже общую для обоих состояний) по D . Существование экстремума по D следует из рис. 9, на котором видна немонотонность оптимизированной по τ ошибки в зависимости от D .

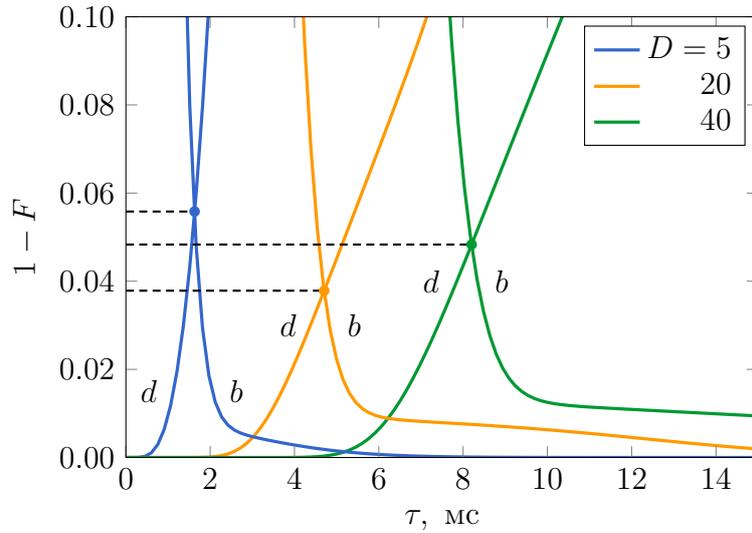


Рис. 9. Зависимость ошибки считывания от времени детектирования при различных D . Пунктирными линиями отмечены оптимизированные по τ ошибки, буквами b и d — графики для светлого и темного состояний соответственно. При построении были взяты значения $\eta = 10^{-3}$, $N = 0.3$, остальные параметры соответствуют иону $^{171}\text{Yb}^+$

Таким образом, исследование зависимости оптимальной ошибки считывания от внешних (относительно процедуры оптимизации) параметров η и N можно проводить по следующему алгоритму. Сначала фиксируются η и N . Затем для каждого D в некотором диапазоне, гарантированно захватывающем оптимальное значение, ищется время детектирования $\tau(D)$, являющееся решением уравнения $F_d = F_b$, значение $F_d(D)$ (или $F_b(D)$) при этом также вычисляется. Наконец, среди вычисленных оптимальных значений ошибки находится минимум по D . В итоге вычисляются параметры оптимизации D , $\tau(D)$, $1 - F(D)$ для данной пары (η, N) .

Результаты оптимизации параметров эксперимента τ и D представлены на рис. 10. Видно, что значения D при фиксированных N монотонно растут и достаточно быстро (в терминах η) выходят на постоянное значение, зависящее только от N . Время детектирования, наоборот, уменьшается, компенсируя растущую эффективность сбора фотонов, так что λ_0 тоже выходит на константу. Увеличение засветки увеличивает оба оптимальных параметра, что может быть объяснено необходимостью дальше «разнести» выше-

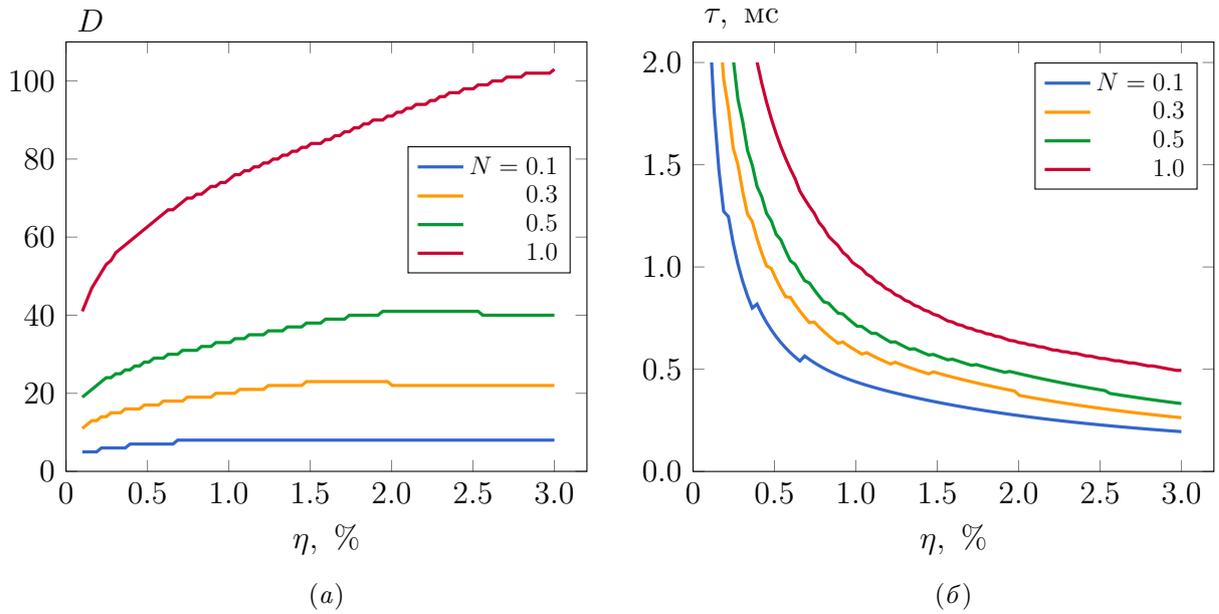


Рис. 10. Оптимальные значения дискриминатора (а) и времени детектирования (б) в зависимости от η при различных значениях N

указанные пики статистики фотонов на λ_{DC} и $\lambda_{DC} + \lambda_0$. Выход λ_0 на константу предположительно связан с наличием пьедесталов утечки, которые имеют приблизительно постоянную высоту вне зависимости от λ_0 и λ_{DC} . Увеличение λ_0 при фиксированном N увеличивает протяженность этих пьедесталов, а поскольку оптимальное значение дискриминатора при этом тоже повышается, данные «хвосты» распределений начинают с некоторого момента вносить ошибку, компенсирующую упомянутое разнесение пиков.

Оптимизированные ошибки считывания, соответствующие найденным выше параметрам, представлены на рис. 11. Главной особенностью данной зависимости является наличие фундаментального (для данной схемы считывания) нижнего предела ошибки, равного $p_{bd} = 0.6\%$. Этот предел связан, как было указано выше, с начальным этапом ди-

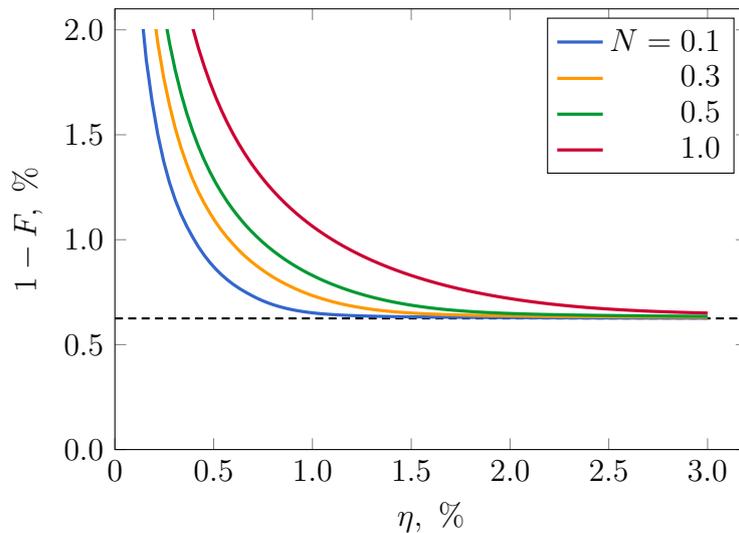


Рис. 11. Зависимость оптимальной ошибки считывания от η при различных N . Пунктиром обозначен уровень p_{bd}

намики светлого состояния, во время которого из-за заселения уровня $P(1)$ происходит утечка в темное состояние. Заметим, что наличие компоненты охлаждающего лазера, вызывающей это заселение, необходимо в силу запрещенности всех остальных переходов, действующих состоянии $S(0)$. Альтернативным подходом к системе считывания, ликвидирующим необходимость второй частотной компоненты лазера, а следовательно, и утечку p_{bd} , может быть предварительный импульс, переводящий населенность из состояния $S(0)$ в состояние $S(1)$. Такой импульс можно осуществить, например, методом адиабатического прохода (rapid adiabatic passage) [47], прикладывая к системе микроволновое поле на частоте вблизи Δ_S при помощи антенны. Эффективность перекачки населенности этим методом близка к единице, а строгие требования на стабильность частоты и интенсивности поля отсутствуют.

Вторая особенность получившейся зависимости состоит в том, что предел достоверности считывания достигается довольно быстро: для стандартных условий засветки ($N \leq 0.5$) при эффективности сбора, равной 1%, ошибка не превышает 0.8%. Это означает, что в случае выбора описанной схемы детектирования с использованием совершенной оптики и с минимизированной засветкой дальнейшее увеличение η не имеет смысла в силу ограничения $1 - F \geq p_{bd}$.

Эксперимент по проведению двухкубитной операции

4.1. Экспериментальная установка

Используемая в данной работе установка состоит из двух основных частей: непосредственно ионной ловушки в вакуумной камере с источником ионов и внешней оптической системы, куда входят все необходимые лазеры, линзы, модуляторы и другие элементы. Ниже представлено описание каждой из частей.

4.1.1. Ионная ловушка

Ловушка Пауля, собранная для целей настоящей работы, имеет вид четырех электродов в виде лезвий, два из которых (расположенных по диагонали друг к другу) заземлены, а на два других подается радиочастотное поле с частотой около 20 МГц. Эти электроды осуществляют радиальное удержание. Аксиальное удержание производится при помощи двух концевых электродов с отверстиями для обеспечения оптического доступа (рис. 12, *а*). На эти электроды подается постоянное напряжение порядка 20 В. Ло-

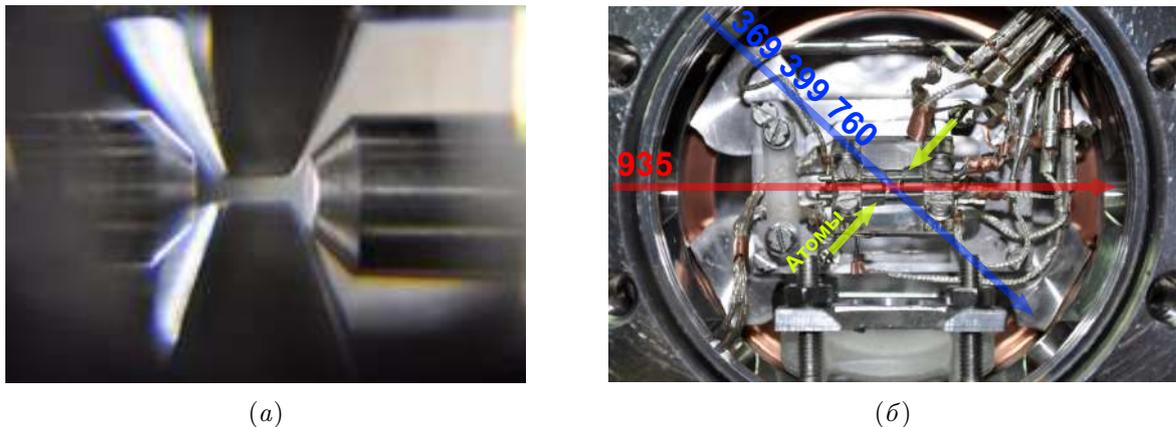


Рис. 12. (*а*) — микрофотография электродов ионной ловушки; (*б*) — расположение ловушки в вакуумной камере с указанием направления пучка нейтральных атомов иттербия и лазерных пучков охлаждения и перекачки

вушка закреплена в вакуумной камере, в которой поддерживается давление менее 10^{-10} мбар. Направление потока нейтральных атомов иттербия из пушки перпендикулярно направлению ионизирующего излучения на длине волны 399 нм для минимизации доплеровских сдвигов резонансной частоты перехода, на котором производится ионизация (рис. 12, *б*). Более подробное описание лазерных источников и их назначения приведено ниже. С внешней стороны камеры расположено несколько катушек, создающих в зоне захвата магнитное поле с величиной порядка нескольких гаусс, которое задает ось квантования и разделяет зеемановские компоненты термов, в частности, терма ${}^2D_{3/2}$, для выделения кубитного уровня с $m_F = 0$.

4.1.2. Оптическая система

Оптическую систему можно разделить на 3 блока, в соответствии выполняемыми ими функциями: система ионизации, охлаждения и перекачки, система считывания и система адресации. Ниже рассмотрены схемы работы данных блоков.

Ионизация, охлаждение и перекачка

Система ионизации, охлаждения и перекачки собрана на отдельной оптической плите, в которую через волокно заводится излучение лазерных источников на длинах волн 369, 935, 760 и 399 нм (рис. 13). Первые две длины волны уже фигурировали ра-

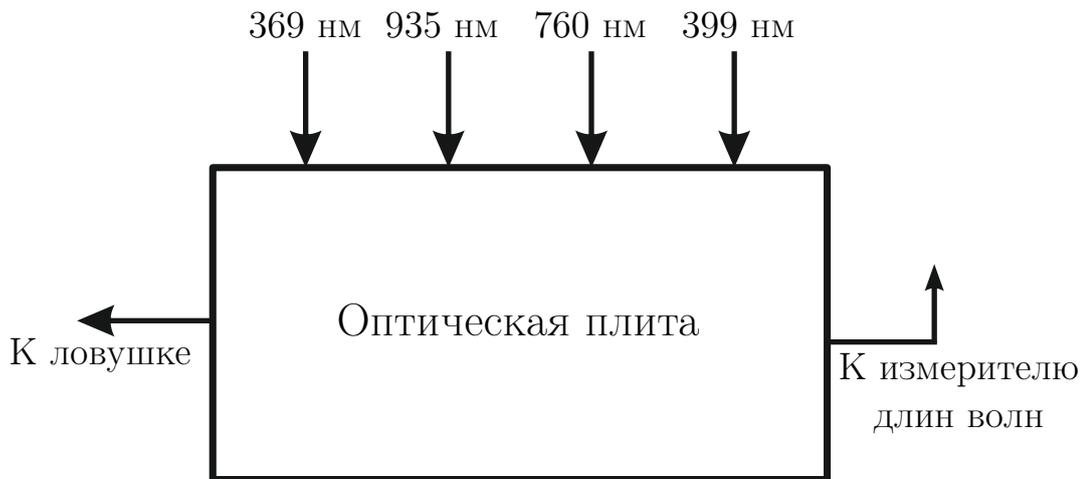


Рис. 13. Упрощенная схема оптической плиты для системы ионизации, охлаждения и перекачки

нее при описании работы с ионами иттербия $^{171}\text{Yb}^+$, а именно: лазер 369 нм отвечает за доплеровское охлаждение кристалла, а 935 нм — за перекачку из метастабильного состояния $^2D_{3/2}$. Лазер 760 нм — это дополнительный лазер перекачки, играющий роль, аналогичную роли лазера 935 нм, а в качестве метастабильного состояния фигурирует терм $^2F_{7/2}$. Этот терм не был показан на схеме уровней, поскольку его заполнение возможно только путем соударений иона с молекулами остаточного газа в вакуумной камере. Последняя длина волны — 399 нм — ионизирующее излучение. Ионизация иттербия этим излучением происходит в два этапа. Сначала возбуждается переход $^1S_0 \rightarrow ^1P_1$ в нейтральном атоме. Верхний уровень отстоит по длине волны от непрерывного спектра на 394 нм, поэтому фотон охлаждающего излучения 369 нм может выбить электрон из атома и таким образом ионизовать его. Фотоионизация лазерным излучением обладает тем преимуществом, что с помощью нее можно селективно ионизовать атомы требуемого изотопа, используя эффект изотопического сдвига.

Оптическая плита, помимо прочих элементов, содержит необходимые акусто- и электрооптические модуляторы (такие как указанные в разделах 2.2 и 2.3). Часть проходящего через плиту излучения отделяется и поступает в измеритель длин волн для стабилизации частоты лазеров путем включения между измерителем и контроллерами

лазеров петли обратной связи. Остальное излучение вводится в волокна и направляется в вакуумную камеру с ловушкой. Непосредственно перед попаданием в камеру пучки 369, 399 и 760 нм совмещаются в один для удобства (см. рис. 12, б).

Считывание

Система считывания представляет собой объектив с фокусным расстоянием $F = 50$ мм, расположенный с боковой стороны ловушки (перпендикулярно ее оси) и обеспечивающий возможность приема излучения со всей цепочки ионов (рис. 14). За объ-

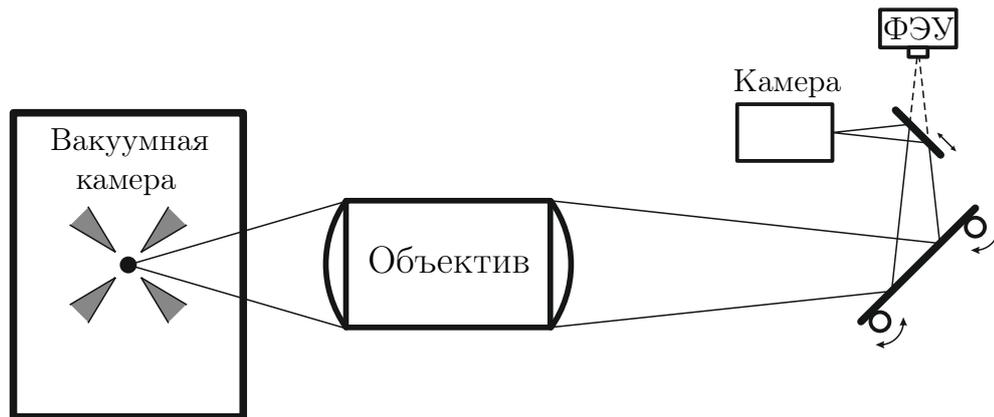


Рис. 14. Схема системы считывания (вид сверху)

ективом располагается зеркало на поворотных моторчиках, осуществляющих тонкую настройку на прием сигнала с отдельных ионов. Далее на пути хода лучей находится еще одно зеркало, закрепленное на выдвижной опоре. В зависимости от его положения сигнал с ионов может идти как на матрицу чувствительной камеры для визуальных наблюдений, так и на фотоэлектронный умножитель (ФЭУ), используемый во время проведения квантовых операций с целью детектирования состояния единичного иона либо нескольких ионов (см. главу 3).

Адресация

Система адресации служит для проведения квантовых операций на ионном кристалле путем возбуждения кубитного квадрупольного перехода на длине волны 435 нм. Первичным источником излучения является лазер с длиной волны 871 нм. Часть излучения этого лазера направляется в дополнительную вакуумную камеру (рис. 15) с размещенным внутри ультрастабильным резонатором Фабри-Перо (РФП). С помощью него методом Паунда-Дривера-Холла [48] осуществляется привязка частоты лазера к одной из продольных мод резонатора. В результате обеспечивается стабильность частоты лазерного излучения в пределах нескольких герц. Другая часть проходит через рупорный усилитель (ТА), а затем через генератор второй гармоники (SHG), получая требуемую длину волны 435.5 нм. Далее пучок разделяется на два: глобальный, предназначенный для возбуждения всего кристалла целиком (и который, в частности,

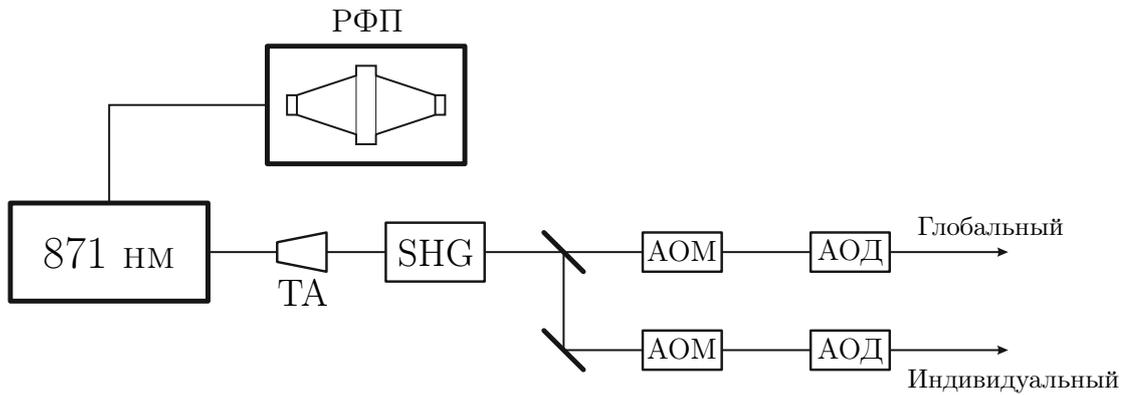


Рис. 15. Схема системы адресации

используется в настоящей работе для реализации двухкубитного MS-гейта), и индивидуальный, нацеленный на единственный ион в цепочке. Индивидуальный пучок нужен для проведения однокубитных операций, а для MS-гейта его наличие не требуется. Оба пучка проходят через акустооптические модуляторы (АОМы), а также через акустооптические дефлекторы (АОДы), отличающиеся от АОМов большей чувствительностью угла отклонения пучка относительно изменения частоты. Подобная комбинация двух модуляторов позволяет прецизионно и независимо регулировать как частоту, так и направление пучка. Помимо этого, управление АОМами позволяет быстро включать и выключать адресующие пучки путем соответственно включения и выключения генераторов сигнала. Для фокусировки пучка индивидуальной адресации внутри вакуумной камеры расположена асферическая линза с фокусным расстоянием $f = 32$ мм, позволяющая разрешить отдельные ионы, находящиеся на расстоянии около 6 микрон друг от друга (рис. 16). Глобальный пучок проходит через отверстия в концевых электродах, взаимодействуя таким образом со всей цепочкой ионов вне зависимости от ее размеров.

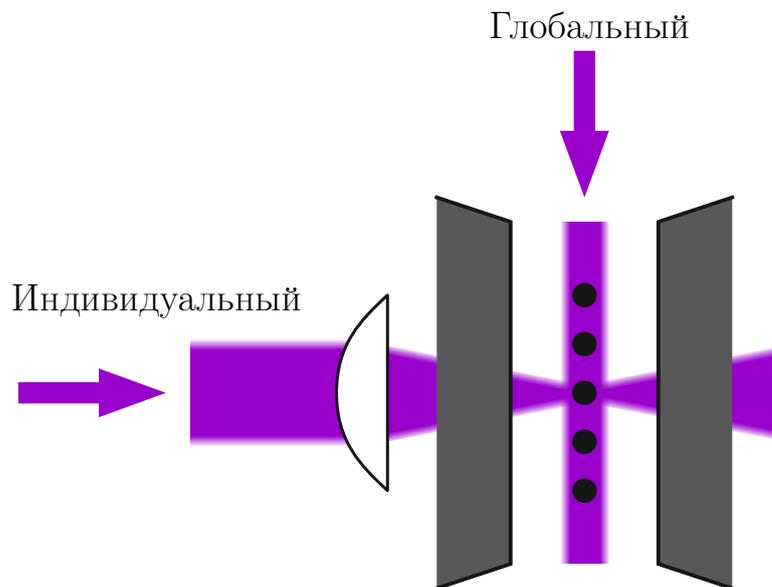


Рис. 16. Направления пучков адресации относительно ловушки

4.2. Определение температуры ионного кристалла по дефазировке осцилляций Раби

Как было указано ранее, температура ионного кристалла заметно влияет на достоверность квантовых операций. Соответственно важно обеспечить возможность измерения этой температуры, так как это позволяет не только оценить эффективность выбранных методов охлаждения, но и охарактеризовать темпы нагрева кристалла, предоставленного самому себе. Последние определяются, помимо прочего, геометрией ловушки, а также величиной паразитных внешних полей, поэтому измерения нагрева могут быть дополнительно использованы для оценки качества сборки ловушки и степени компенсации микродвижения.

Методы измерения температуры кристаллов, основанные на спектроскопии боковых секулярных частот [49], хорошо работают только для значений среднего числа колебательных квантов в моде $\bar{n} \sim 5$ и ниже. Более того, даже если кристалл охлажден ниже этого значения, при больших темпах его нагрева диапазон времен, для которых температура поддается измерению, все равно окажется сильно ограниченным, что понижает точность подобных методов.

Изложенный в данном разделе альтернативный метод измерения температуры кристалла с произвольным количеством ионов работает в диапазоне \bar{n} порядка характерных значений доплеровского предела охлаждения, а также позволяет определить темпы нагрева с удовлетворительной точностью на больших временах.

4.2.1. Формула для дефазировки

Вернемся к рассмотренной в первой главе формуле (1.56) для резонансной частоты Раби перехода $n \leftrightarrow n'$ в кристалле:

$$\Omega_j^{(n,n')} = \Omega_j \prod_{l=1}^N D_{n_l, n'_l}^{(j)}, \quad (4.1)$$

в которой факторы Дебая-Уоллера вычисляются согласно (1.57). Возбуждение кристалла производится единственным пучком, направленным вдоль оси, и имеющим частоту, настроенную в резонанс с электронным переходом $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ в ионе. Взаимодействие с данным излучением происходит на несущей частоте, следовательно, перепутывания колебательных степеней свободы с внутренними не происходит, и эволюция населенностей кубитных уровней каждого иона независима. Если наблюдение ведется за одним конкретным ионом, индекс j можно опустить. Для перехода на несущей частоте фактор Дебая-Уоллера имеет вид

$$D_{n_k} = e^{-\eta_k^2/2} L_{n_k}(\eta_k^2). \quad (4.2)$$

В режиме Лэмба-Дике верно неравенство $\sqrt{\bar{n}_k} \eta_k \ll 1$, поэтому данное выражение можно раскрыть с точностью до η^2 :

$$D_{n_k} \approx e^{-\eta_k^2/2} (1 - n_k \eta_k^2) \approx 1 - (n_k + 1/2) \eta_k^2. \quad (4.3)$$

Тогда можно для частоты Раби записать

$$\Omega_{\{n_k\}} \approx \Omega_0 \prod_{k=1}^N (1 - (n_k + 1/2) \eta_k^2) \approx \Omega_0 \left(1 - \sum_{k=1}^N (n_k + 1/2) \eta_k^2 \right). \quad (4.4)$$

Зависимость населенности верхнего уровня $|1\rangle$ в ионе от времени определяется суммой осцилляций Раби для каждого колебательного состояния:

$$P(t) = \frac{1}{2} \sum_{\{n_k\}} p_{\{n_k\}} (1 - \cos(\Omega_{\{n_k\}} t)), \quad (4.5)$$

где $p_{\{n_k\}}$ — населенность колебательного состояния $\{n_k\}$. Зависимость частоты Раби от $\{n_k\}$ приводит к тому, что с течением времени осцилляции на разных колебательных уровнях перестают быть синхронными, вызывая дефазировку. Пример такой дефазировки представлен на рис. 17.

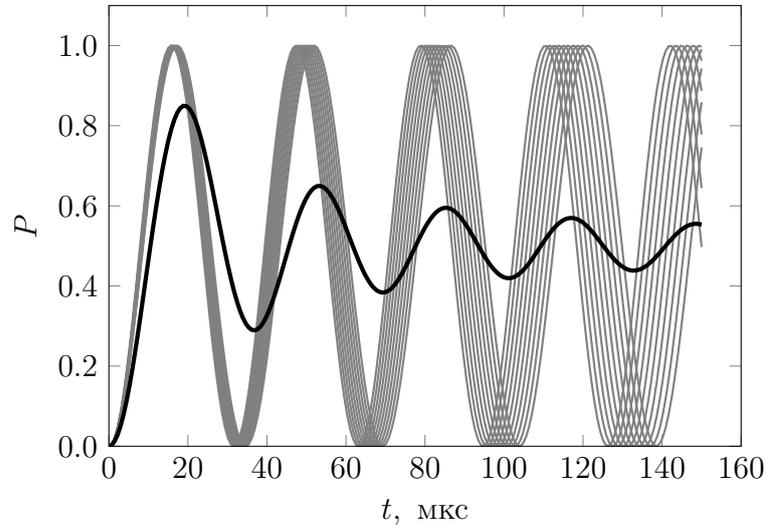


Рис. 17. Дефазировка осцилляций Раби для одиночного иона с $\eta = 0.1$ и $\bar{n} = 30$. Серым показаны колебания населенности для первых 10 мод, черным — взвешенная сумма по всем модам

Найдем явное выражение для зависимости $P(t)$. Сумма по $\{n_k\}$ может быть рассмотрена в виде бесконечного ряда в силу того, что глубины типичных ионных ловушек составляют величины порядка 10^8 колебательных квантов, что намного больше, чем средняя энергия захваченного иона, в том числе и без охлаждения. Это обстоятельство

позволяет записать

$$P(t) = \frac{1}{2} \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} p_{\{n_k\}} (1 - \cos(\Omega_{\{n_k\}} t)). \quad (4.6)$$

Примем для каждой моды тепловое распределение со средним \bar{n}_k , тогда получаем населенности колебательных состояний в виде

$$p_{\{n_k\}} = \frac{\exp\left(-\sum_{k=1}^N \alpha_k n_k\right)}{\prod_{k=1}^N (\bar{n}_k + 1)}, \quad (4.7)$$

где $e^{-\alpha_k} = \bar{n}_k / (\bar{n}_k + 1)$. Подставляя вместе с (4.4) в (4.6) и используя экспоненциальную запись косинуса, приходим к выражению

$$P(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4 \prod_{k=1}^N (\bar{n}_k + 1)} \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \left[e^{i\Omega_0 t} \exp\left(-\sum_{k=1}^N (\alpha_k n_k + i\Omega_0 \eta_k^2 t n_k + i\Omega_0 \eta_k^2 t / 2)\right) + \text{с.с.} \right]. \quad (4.8)$$

Слагаемое типа

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \exp\left(-\sum_{k=1}^N (\alpha_k n_k + i\Omega_0 \eta_k^2 t (n_k + 1/2))\right) \quad (4.9)$$

можно записать в виде произведения сумм по отдельным n_k как

$$\prod_{k=1}^N \left[e^{-i\Omega_0 \eta_k^2 t / 2} \sum_{n_k=0}^{\infty} \exp\left(-(\alpha_k + i\Omega_0 \eta_k^2 t) n_k\right) \right]. \quad (4.10)$$

Каждая из этих сумм является суммой геометрической прогрессии:

$$\sum_{n_k=0}^{\infty} \exp\left(-(\alpha_k + i\Omega_0 \eta_k^2 t) n_k\right) = \frac{1}{1 - e^{-\alpha_k - i\Omega_0 \eta_k^2 t}} = \frac{1 - e^{-\alpha_k + i\Omega_0 \eta_k^2 t}}{1 - 2e^{-\alpha_k} \cos(\Omega_0 \eta_k^2 t) + e^{-2\alpha_k}}. \quad (4.11)$$

Аналогичным образом вычисляется второе слагаемое в квадратных скобках выражения (4.8). С учетом определения α_k , зависимость населенности от времени примет вид

$$P(t) = \frac{1}{2} - \frac{\left[e^{i\Omega_0 t} \prod_{k=1}^N e^{-i\Omega_0 \eta_k^2 t / 2} \left(1 - \frac{\bar{n}_k e^{i\Omega_0 \eta_k^2 t}}{\bar{n}_k + 1}\right) + \text{с.с.} \right]}{4 \prod_{k=1}^N \left((\bar{n}_k + 1) - 2\bar{n}_k \cos(\Omega_0 \eta_k^2 t) + \frac{\bar{n}_k^2}{\bar{n}_k + 1} \right)}. \quad (4.12)$$

С использованием обозначения действительной части комплексного числа формула может быть переписана следующим образом:

$$P(t) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\operatorname{Re} \left[e^{i\Omega_0 t} \prod_{k=1}^N e^{-i\Omega_0 \eta_k^2 t/2} \left(1 - \frac{\bar{n}_k e^{i\Omega_0 \eta_k^2 t}}{\bar{n}_k + 1} \right) \right]}{\prod_{k=1}^N \left((\bar{n}_k + 1) - 2\bar{n}_k \cos(\Omega_0 \eta_k^2 t) + \frac{\bar{n}_k^2}{\bar{n}_k + 1} \right)} \right]. \quad (4.13)$$

Для характеристики всего кристалла удобно ввести параметры $r_k = \omega_k/\omega_1$, где ω_1 — частота колебаний моды центра масс (моды, в которой весь ионный кристалл движется поступательно). Данная формула верна для любых \bar{n}_k , пока справедливо предположение о тепловом распределении в каждой моде. Однако в случае доплеровского охлаждения средние энергии мод совпадают, поэтому можно выразить \bar{n}_k через среднее число фононов в моде центра масс: $\bar{n}_k = \bar{n}/r_k$. Кроме того, ошибки считывания и подготовки состояния могут быть учтены введением дополнительного множителя a , значение которого в идеальном случае равно единице. Тогда функция $P(t)$ примет вид

$$P(t) = \frac{a}{2} \left[1 - \frac{\operatorname{Re} \left[e^{i\Omega_0 t} \prod_{k=1}^N \left(1 - \frac{(\bar{n}/r_k) e^{i\Omega_0 \eta_k^2 t}}{\bar{n}/r_k + 1} \right) \right]}{\prod_{k=1}^N \left((\bar{n}/r_k + 1) - 2(\bar{n}/r_k) \cos(\Omega_0 \eta_k^2 t) + \frac{(\bar{n}/r_k)^2}{(\bar{n}/r_k + 1)} \right)} \right] \quad (4.14)$$

и будет зависеть от трех экспериментальных параметров: \bar{n} , a , Ω_0 , коэффициенты η_k , r_k определяются геометрией ловушки, количеством ионов в кристалле и частотами их колебаний. Заметим, что в общем случае возбуждения колебаний кристалла по всем трем осям формула (4.14) по-прежнему верна, с той разницей, что в произведения по модам вместо параметров η_k , \bar{n} , r_k должны входить параметры типа η_{ik} , \bar{n}_i , r_{ik} , где $i = x, y, z$ — индекс главной оси колебаний, а коэффициенты Лэмба-Дике зависят от направления пучка, а именно от проекции его волнового вектора на соответствующую главную ось.

4.2.2. Темпы нагрева одиночного иона

Для одиночного иона в ловушке произведение в формуле (4.14) состоит из одного множителя, а соответствующие параметры равны

$$\eta = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{h}{2m\nu}}, \quad r = 1. \quad (4.15)$$

где λ — длина волны возбуждающего излучения (435 нм), m — масса иона, ν — частота моды центра масс, выраженная в герцах. Эта частота в эксперименте составляла 467 кГц.

Схема измерения темпов нагрева состоит в следующем. Сначала ион охлаждается лазерной системой до некоторой фиксированной температуры (в данном случае эта

температура близка к доплеровскому пределу). Затем все лазерные источники выключаются на время задержки τ . По окончании этого времени включается лазер с длиной волны 435 нм, вызывающий осцилляции Раби между кубитными состояниями, и снимается зависимость населенности верхнего кубитного уровня от времени импульса $P(t)$ (для каждого времени импульса t процедуру охлаждения и задержки необходимо проводить заново из-за разрушения состояния процессом измерения). Максимальное время импульса предполагается малым по сравнению с характерным временем разогрева иона (в чем можно убедиться по результатам измерений, представленным ниже). По снятой зависимости $P(t)$ строится аппроксимация формулой (4.14), из которой находится среднее число колебательных квантов при данном времени задержки $\bar{n}(\tau)$. После этого весь алгоритм повторяется для другого значения задержки. По имеющимся данным $\bar{n}(\tau)$ проводится аппроксимация линейной функцией. Коэффициент наклона этой прямой будет оценкой темпов нагрева в ловушке (в фононах в секунду).

В данной работе были сняты зависимости $P(t)$ для пяти времен задержки. Графики осцилляций Раби для каждого из этих времен представлены на рис. 18. В каждом из

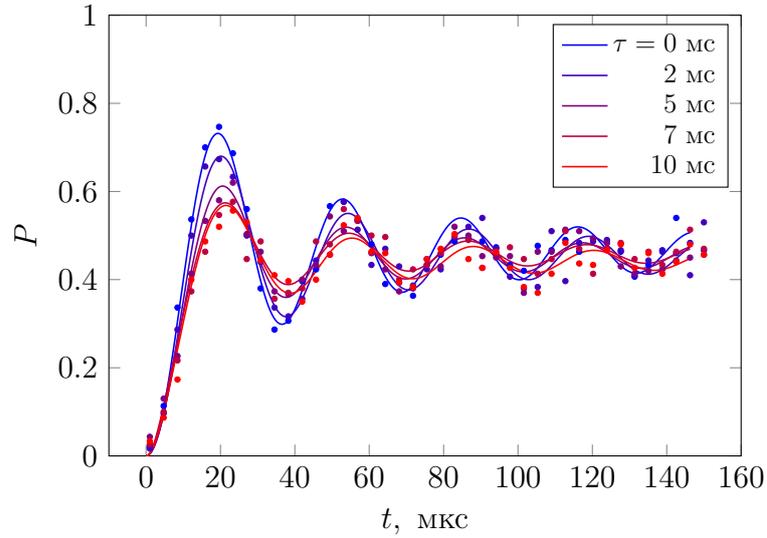


Рис. 18. Дефазировка осцилляций Раби для одиночного иона при разных временах задержки

экспериментов значение Ω_0 оставалось примерно постоянным и равным $\Omega_0 \approx 200 \text{ мс}^{-1}$, а значение a было близко к единице, что находится в согласии с принятой моделью. Аппроксимация зависимости $\bar{n}(\tau)$ прямой приведена на рис. 19. Темпы нагрева иона, таким образом, оцениваются величиной

$$\dot{\bar{n}} \approx (8 \pm 2) \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}. \quad (4.16)$$

За время импульса порядка 150 микросекунд такие темпы нагрева увеличат среднее колебательное число на величину порядка

$$\Delta \bar{n} \approx 1.2, \quad (4.17)$$

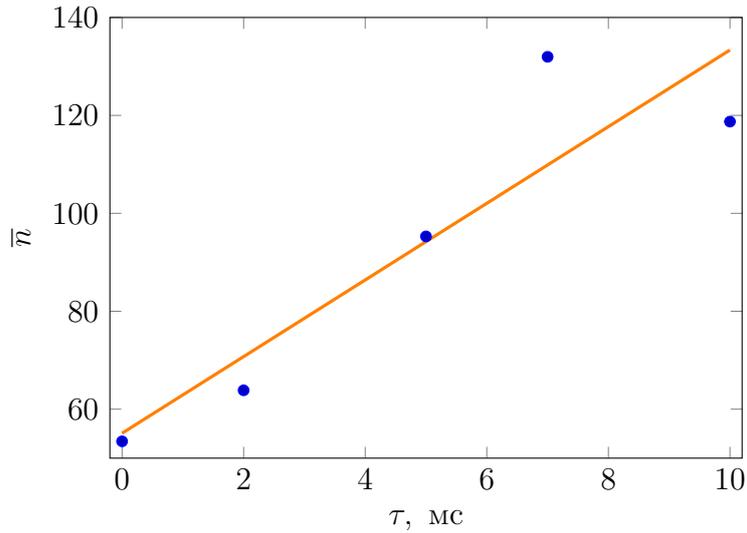


Рис. 19. Зависимость среднего колебательного числа одиночного иона от времени задержки

что гораздо меньше характерных значений \bar{n} в эксперименте (от 50 до 130), поэтому приближение постоянства распределения по колебательным числам можно считать справедливым в пределах погрешности.

4.2.3. Температура кристалла из 5 ионов

В данной работе производилось измерение температуры линейного массива из 5 ионов при наблюдении за крайнем ионом. Для него набор соответствующих параметров Лэмба-Дике вычисляется по следующей формуле:

$$\eta_k = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{h}{2m\nu}} \frac{b_k}{\sqrt{r_k}}, \quad (4.18)$$

где b_k — первая компонента k -го амплитудного вектора из решения уравнения (1.14). Эти решения для кристалла из 5 ионов имеют следующий вид [50]:

$$\begin{aligned} b_k &= \{0.4472, -0.6395, 0.5377, -0.3017, 0.1045\}, \\ r_k &= \{1, 1.732, 2.412, 3.055, 3.670\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Тогда, подставляя численные значения остальных величин, находим выражение для вычисления параметров Лэмба-Дике:

$$\eta_k = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \{35.09, -38.13, 27.17, -13.54, 4.280\}. \quad (4.20)$$

Эти параметры необходимо подставить в формулу (4.14) для последующей аппроксимации зависимости $P(t)$. Результат этой аппроксимации приведен на рис. 20. Значение параметра a оказалось равным 0.97, то есть ошибка подготовки и считывания мала.

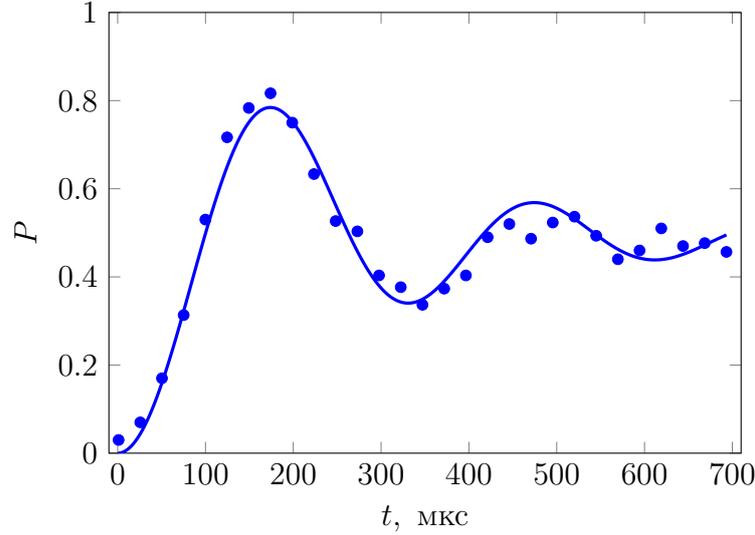


Рис. 20. Осцилляции Раби на крайнем ионе кристалла из 5 ионов

Среднее колебательное число в проведенном эксперименте равно

$$\bar{n} = 75 \pm 3, \quad (4.21)$$

отсюда находим температуру из распределения Гиббса:

$$T = \frac{\hbar\omega_1}{k_B \ln(1 + 1/\bar{n})} = 1.69 \pm 0.08 \text{ мК}. \quad (4.22)$$

Эта температура в несколько раз больше доплеровского предела, равного

$$T_D = \frac{\hbar\Gamma}{2k_B} = 0.5 \text{ мК}. \quad (4.23)$$

Объяснено это может быть наличием дополнительных источников нагрева иона (помимо отдачи от спонтанного распада), например, аномальных нагревов, связанных с флуктуациями потенциала удерживающих электродов, а также с наличием вблизи кристалла диэлектриков, поляризующихся ионами и наводящих на них дополнительное поле. Тем не менее, полученное значение дает адекватную оценку температуры, следовательно, описанный метод эффективно работает в рассматриваемом диапазоне средних колебательных чисел ($\bar{n} \sim 50$).

4.3. Проведение MS-гейта

Данный раздел посвящен непосредственно эксперименту по проведению двухкубитной операции. Сначала поэтапно рассматривается экспериментальная процедура, затем приводятся результаты с оценкой достоверности двухкубитного MS-гейта.

4.3.1. Экспериментальный протокол

В начале эксперимента производится загрузка кристалла из 2 ионов $^{171}\text{Yb}^+$. Включаются источники 369, 399, 935 и 760 нм, соответствующие им модуляторы, а также источники удерживающих полей и атомная пушка. Поток нейтральных атомов иттербия облучается ионизирующим лазером 399 нм в зоне захвата, так что ионы $^{171}\text{Yb}^+$ возникают вблизи центра ловушки и сразу начинают ею удерживаться. Наблюдение за процессом загрузки ведется при помощи камеры, включенной в систему считывания. Охлаждающее и перекачивающее излучение обеспечивает локализацию ионов на оси ловушки, тем самым формируя ионный кристалл. Загрузка продолжается до тех пор, пока на экране камеры не будет видно кристалла из 2 ионов, после чего источник 399 нм и атомная пушка выключаются.

Экспериментальная последовательность лазерных импульсов, используемая для калибровки и последующего проведения квантовых операций, представлена на рис. 21. Этапы «Охлаждение», «Подготовка состояния» и «Считывание состояния» были опи-

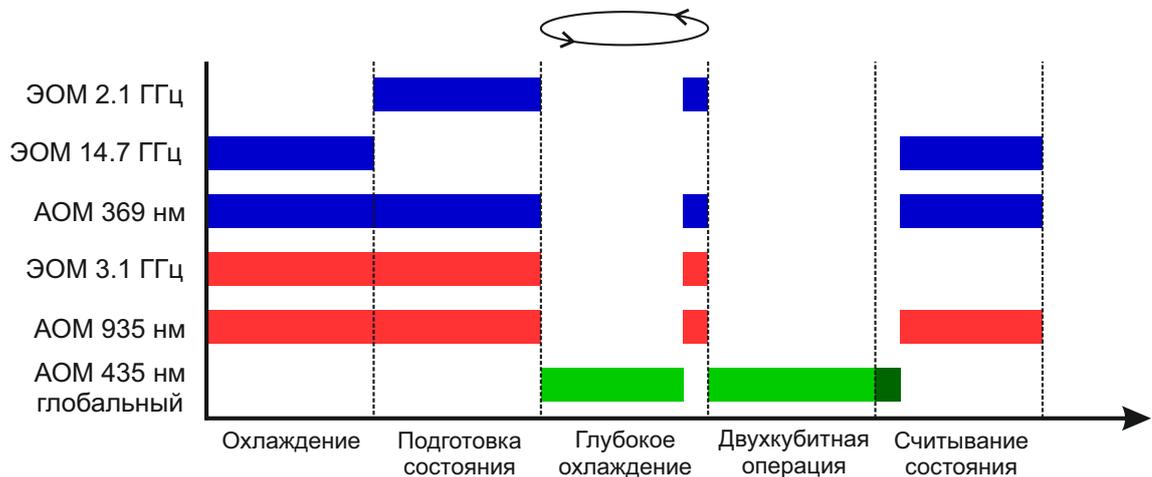


Рис. 21. Последовательность генерации лазерных импульсов для реализации двухкубитного MS-гейта

саны ранее в разделах 2.2 и 2.3.

Этап «Глубокое охлаждение» представляет собой многократно повторяющуюся последовательность π -импульсов на красной боковой колебательной частоте для обеих мод (симметричной и антисимметричной), между которыми производится инициализация состояния, аналогичная процессу подготовки. Более подробное описание механизма охлаждения на боковых частотах изложено в разделе 2.2. Инициализация между охлаждающими импульсами предназначена для ускорения процесса распада в состояние $|0\rangle$, естественное время жизни которого $\tau = 53$ мс слишком большое, чтобы эффективно и быстро проводить охлаждение до основного состояния через спонтанный распад.

Этап «Двухкубитная операция» состоит в реализации MS-гейта на антисимметричной моде с использованием глобального лазерного пучка 435 нм (см. раздел 1.4). Бихроматическое оптическое поле создается путем подачи радиочастотного сигнала, смешанного из сигналов двух частот, на АОМ, управляющий рассматриваемым пучком.

Отстройка от колебательной моды μ и амплитуда подаваемого сигнала подбираются таким образом, чтобы выполнялось оптимальное для максимизации достоверности соотношение $\mu = 2\eta\Omega$, где Ω — резонансная частота Раби, η — параметр Лэмба-Дике для антисимметричной моды. Частоты Раби для обеих компонент должны совпадать. Разность фаз в формуле (1.92) мала в силу близкой расположенности ионов, поэтому ей можно пренебречь. Время гейта сканируется для снятия зависимости вероятностей p_0, p_1 и p_2 нахождения 0, 1 и 2 ионов в состоянии $|1\rangle$ соответственно. Оптимальное время гейта должно быть близким к значению $2\pi/\mu$ и отвечать минимуму величины p_1 . В части экспериментов необходимо определить четность получившегося состояния, в связи с чем после выполнения двухкубитного гейта подается анализирующий импульс (на рис. 21 показан темно-зеленым), и только затем состояния ионов детектируются. По окончании описанной последовательности включается система доплеровского охлаждения, и процесс повторяется необходимое для сбора достаточной статистики количество раз.

Перед проведением двухкубитной операции необходимо откалибровать значения порога дискриминаторов системы детектирования, а также определить частоту электронного перехода $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ и частоту колебательной моды, на которой производится MS-гейт. Для осуществления первой задачи достаточно провести два опыта. Первый опыт заключается в проведении экспериментальной последовательности с перекрытым пучком 435 нм. При отсутствующем пучке двухкубитного гейта оба иона будут находиться в состоянии $|0\rangle$ и интенсивно рассеивать фотоны во время считывания. Сигналы флуоресценции от обоих ионов снимаются при помощи ФЭУ. Пусть N_b — среднее количество считанных в этом случае фотонов (опыт повторяется 1000 раз для минимизации случайной ошибки). Второй опыт аналогичен первому, но в этот раз перекрывается перекачивающее излучение 935 нм. В результате перекрытия оба иона достаточно быстро окажутся в долгоживущем терме ${}^2D_{3/2}$ и не будут рассеивать фотоны, соответственно, снятый сигнал будет обусловлен в основном засветками. Пусть N_d — среднее снятое в этом опыте количество фотонов. Если считать одинаковыми средние количества фотонов, снимаемые с каждого иона, то ситуация, когда светится ровно 1 ион, будет отвечать среднему количеству фотонов, равному $(N_b + N_d)/2$. Соответственно значения дискриминаторов можно выбрать посередине между N_b (N_d) и $(N_b + N_d)/2$:

$$d_1 = N_d + \frac{N_b - N_d}{4} = \frac{3}{4}N_d + \frac{1}{4}N_b, \quad d_2 = N_b - \frac{N_b - N_d}{4} = \frac{1}{4}N_d + \frac{3}{4}N_b. \quad (4.24)$$

Таким образом, если количество собранных фотонов N не больше d_1 , состояние классифицируется как 0 ионов в $|0\rangle$ (соответственно 2 иона в $|1\rangle$), если это количество лежит между d_1 и d_2 — один ион находится в $|1\rangle$, другой в $|0\rangle$, если $N > d_2$ — оба иона в состоянии $|0\rangle$.

Калибровка частоты АОМа глобального пучка на резонанс с электронным переходом $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ в ионе производится следующим образом. Система считывания перестраивается на съём излучения с одного иона. Повторяется экспериментальная последова-

тельность двухкубитной операции с некоторыми изменениями: из нее убирается этап «Глубокое охлаждение», а на этапе «Двухкубитная операция» вместо бихроматического сигнала на АОМ подается обычный гармонический. Частота АОМа сканируется вблизи расчетного значения для взаимодействия на несущей частоте перехода $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$, при этом время импульса остается фиксированным и равным 100 мкс. Для каждого значения частоты АОМа последовательность повторяется не менее 100 раз. По результатам строится зависимость $P(\nu)$ населенности состояния $|1\rangle$ от частоты АОМа. Аналитическая формула для этой зависимости может быть получена из решения уравнений осцилляций Раби [51]:

$$P(\nu) = A + B \operatorname{sinc}^2 \left(C \sqrt{D + (\nu - \nu_0)^2} \right), \quad (4.25)$$

где A — сдвиг, учитывающий засветку, коэффициенты B, C, D зависят от резонансной частоты Раби и от времени импульса, ν_0 — центр линии. Значение последнего параметра находится из аппроксимации и фиксируется на генераторе сигналов АОМа. Затем при данной частоте АОМа сканируется время импульса и исследуются осцилляции Раби на несущей частоте. По результатам наблюдений определяется время π -импульса как точка максимума населенности. Если это время лежит вне диапазона от 10 до 30 мкс, то амплитуда напряжения на генераторе регулируется соответствующим образом для попадания времени в заданный диапазон. После этого процесс поиска резонансной частоты и времени π -импульса повторяется до тех пор, пока различие найденных параметров для двух последовательных итераций не составит меньше 10 процентов.

Поиск осевых частот колебаний производится аналогичным образом. Зная несущую частоту из предыдущей процедуры калибровки, сканируется частота АОМа глобального пучка в интервале 2 МГц относительно несущей. При этом на частотах, сдвинутых от несущей на частоты мод колебаний кристалла, будут наблюдаться побочные пики. Частоты симметричной и антисимметричной мод в кристалле из двух ионов отличаются друг от друга в $\sqrt{3}$ раз, поэтому эти два пика будут расположены ближе всего к основному (пик второго порядка симметричной моды отстоит на ее удвоенную частоту, что больше, чем расстояние до пика первого порядка антисимметричной моды). После грубого определения положения пика антисимметричной моды проводится более мелкое сканирование вблизи центра линии. По результатам аппроксимации, аналогичной рассмотренной ранее, определяется частота антисимметричной моды.

После калибровки системы и нахождения необходимых значений частот выполняется эксперимент по измерению достоверности двухкубитной операции. Сначала, как было указано ранее при описании этапа «Двухкубитная операция», экспериментальная последовательность повторяется при сканировании времени MS-гейта от 10 до 800 мкс. На каждое время гейта приходится не менее 100 повторений для сбора статистики. Анализирующий импульс в этом эксперименте отсутствует. По результатам строится зависимость величин p_1 и p_2 от времени гейта. Если параметры гейта подобраны оптимально, то спустя время, кратное $\tau_0 = \pi/\eta\Omega$ величина p_1 будет обращаться в ноль. При

этом значение p_2 в момент τ_0 достигнет значения 0.5, а в момент $2\tau_0$ — единицы. Из наблюдений динамики населенностей определяется τ_0 как точка минимума p_1 . Значение p_1 в этой точке используется для вычисления достоверности гейта.

Во втором эксперименте время гейта фиксируется на значении τ_0 . В конце двухкубитной операции добавляется анализирующий импульс, фаза которого сканируется при помощи задания соответствующей фазы генератора. Этот импульс также, как и MS-гейт, проводится глобальным пучком. Снимается зависимость четности состояния $P(\varphi) = 1 - 2p_1$ от фазы анализирующего импульса φ . Зависимость, как следует из (1.120), может быть аппроксимирована функцией

$$P(\varphi) = A + B \cos(2\varphi + \varphi_0), \quad (4.26)$$

где A — сдвиг, выступающий в качестве поправки на систематические погрешности. Значение амплитуды B , найденное из данной аппроксимации, подставляется в формулу

$$F = \frac{1 - p_{1(\min)} + B}{2} \quad (4.27)$$

(формула (1.121) из первой главы) вместе с найденным ранее $p_{1(\min)}$ для оценки достоверности двухкубитной операции.

4.3.2. Результаты эксперимента

Для осуществления двухкубитного MS-гейта в ловушку был загружен кристалл из 2 ионов иттербия $^{171}\text{Yb}^+$. Фото кристалла, полученное камерой, представлено на рис. 22.

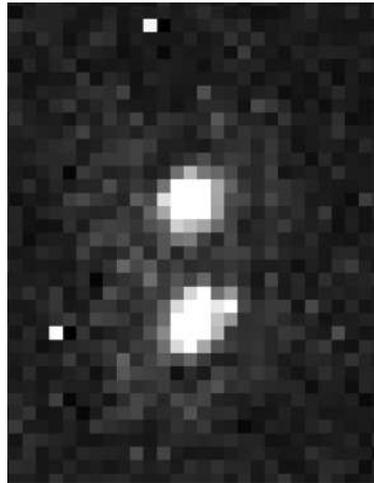


Рис. 22. Изображение кристалла из двух ионов $^{171}\text{Yb}^+$ в ловушке

После загрузки кристалла и калибровки системы был проведен два основных эксперимента по измерению достоверности двухкубитной операции. Результат первого из них проиллюстрирован на рис. 23. В первом эксперименте снималась зависимость вероятности возбуждения одного и двух ионов p_1 и p_2 соответственно от времени импульса

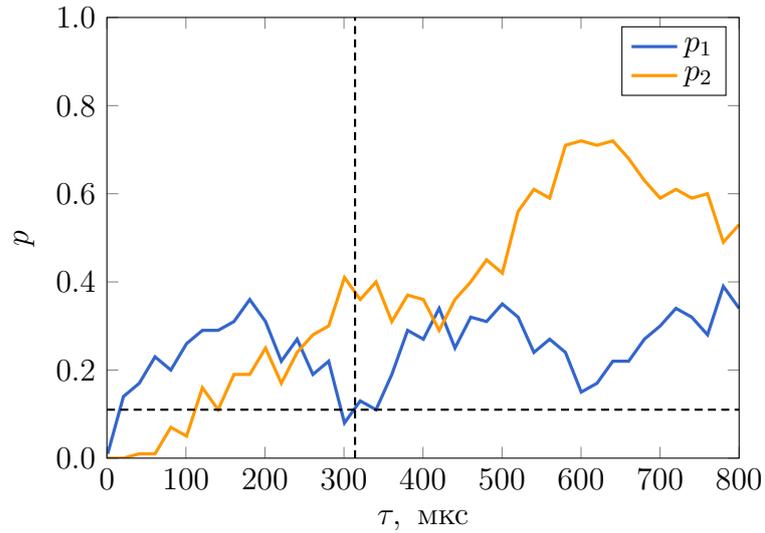


Рис. 23. Зависимость вероятности возбуждения одного и двух ионов в кристалле от времени двухкубитной операции. Пунктирными линиями обозначена точка $(\tau_0, p_{1(\min)})$

двухкубитной операции. Минимум величины p_1 равен $p_{1(\min)} = 0.11 \pm 0.07$ и достигается в момент времени $\tau_0 = 314$ мкс. Во втором эксперименте время гейта фиксировалось на значении τ_0 , а в конце операции добавлялся анализирующий импульс со сканируемой фазой φ . Зависимость четности состояния $P(\varphi) = 1 - 2p_1$ от фазы импульса представлена на рис. 24.

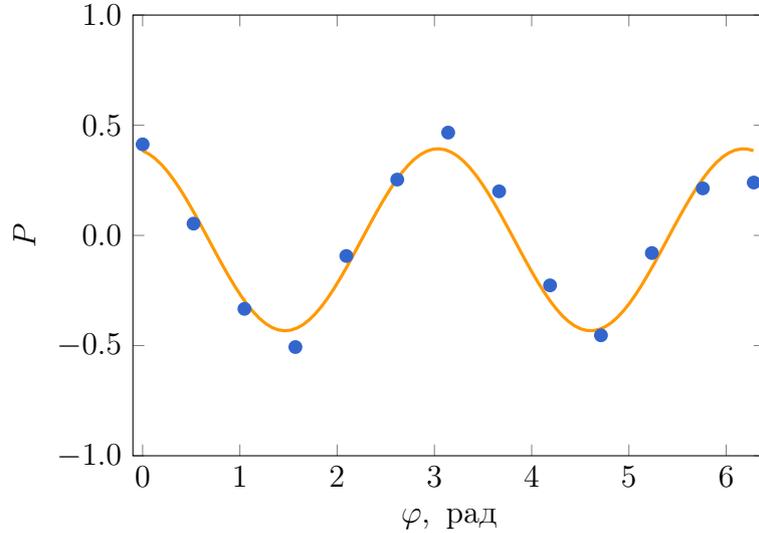


Рис. 24. Зависимость четности состояния от фазы анализирующего импульса

Аппроксимация функцией $P(\varphi) = A + B \cos(2\varphi + \varphi_0)$ дает для коэффициента B значение $B = 0.41 \pm 0.03$. В результате получаем для достоверности проводимой в данной работе двухкубитной операции

$$F = \frac{1 - p_{1(\min)} + B}{2} = 0.65 \pm 0.04. \quad (4.28)$$

Заключение

В настоящей работе была продемонстрирована двухкубитная квантовая операция на оптическом переходе в ионах иттербия $^{171}\text{Yb}^+$. Достоверность этой операции, измеренная в эксперименте, составила $(65 \pm 4)\%$. Ограничение достоверности связано главным образом с шумами лазера на длине волны 435 нм, из-за которых возбуждаются паразитные переходы на несущей частоте. Тем не менее, динамика населенностей состояний ионов, а также осцилляции четности подтверждают предположение об успешности проведенного MS-гейта. В сочетании с полным набором однокубитных операций, реализуемых индивидуальными пучками адресации, возможна демонстрация универсальности квантового вычислителя, основанного на экспериментальной установке, рассматриваемой в работе.

Также разработана теоретическая модель для считывания состояния одиночного иона, которая показала наличие фундаментального (для данной системы лазерных пучков и протокола детектирования) предела достоверности. Этот предел возникает в результате переходного процесса в начале процедуры считывания. Численная оптимизация параметров установила, что этот предел вполне достижим на практике при стандартных условиях засветки. Помимо этого, предложен метод измерения температуры ионных цепочек произвольной длины, основанный на дефазировке осцилляций Раби, и работающий для кристаллов, находящихся в режиме Лэмба-Дике после доплеровского охлаждения.

Дальнейшее развитие проекта предполагает дополнительное подавление шумов лазера адресации при помощи фильтрующего резонатора для увеличения достоверности операций, установку многоканального фотоэлектронного умножителя вместе с системой сбора излучения отдельно от каждого иона в цепочке, а также сборка новой ловушки с улучшенной геометрией и масштабирование размера квантового регистра до 5 кубитов и больше.

Список литературы

1. *Манин Ю.* Вычислимое и невычислимое. — Москва : «Советское радио», 1980. — С. 15.
2. *Feynman R.* Simulating Physics with Computers // International Journal of Theoretical Physics. — 1982. — Июнь. — Т. 21. — DOI: [10.1007/BF02650179](https://doi.org/10.1007/BF02650179).
3. *Soeparno H., Perbangsa A.* Cloud Quantum Computing Concept and Development: A Systematic Literature Review // Procedia Computer Science. — 2021. — Янв. — Т. 179. — С. 944–954. — DOI: [10.1016/j.procs.2021.01.084](https://doi.org/10.1016/j.procs.2021.01.084).
4. *Buhler J. P., Lenstra H. W., Pomerance C.* Factoring integers with the number field sieve // The development of the number field sieve / под ред. А. К. Lenstra, Н. W. Lenstra. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1993. — С. 50–94. — DOI: [10.1007/BFb0091539](https://doi.org/10.1007/BFb0091539).
5. *Pomerance C.* The Quadratic Sieve Factoring Algorithm // Advances in Cryptology / под ред. Т. Beth, N. Cot, I. Ingemarsson. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1985. — С. 169–182. — DOI: [10.1007/3-540-39757-4_17](https://doi.org/10.1007/3-540-39757-4_17).
6. *Shor P.* Algorithms for Quantum Computation: Discrete Logarithms and Factoring // Proceedings of 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science. — 1996. — Окт. — DOI: [10.1109/SFCS.1994.365700](https://doi.org/10.1109/SFCS.1994.365700).
7. *Rivest R. L., Shamir A., Adleman L.* A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems // Communications of the ACM. — 1983. — Т. 26, № 1. — С. 96–99. — DOI: [10.1145/357980.358017](https://doi.org/10.1145/357980.358017).
8. *Grover L.* Fast quantum mechanical algorithm for database search // Proceedings of the 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing. — 1996. — Июнь. — DOI: [10.1145/237814.237866](https://doi.org/10.1145/237814.237866).
9. *Lloyd S.* Universal Quantum Simulators // Science. — 1996. — Т. 273, № 5278. — С. 1073–1078. — DOI: [10.1126/science.273.5278.1073](https://doi.org/10.1126/science.273.5278.1073).
10. *Klein A., Jaksch D.* Simulating high-temperature superconductivity model Hamiltonians with atoms in optical lattices // Physical Review A. — 2006. — Февр. — Т. 73. — DOI: [10.1103/PhysRevA.73.053613](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.73.053613).
11. *Bauer C. W., Nachman B., Freytsis M.* Simulating Collider Physics on Quantum Computers Using Effective Field Theories // Phys. Rev. Lett. — 2021. — Ноябрь. — Т. 127, вып. 21. — С. 212001. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.127.212001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.127.212001).
12. Analogue quantum chemistry simulation / J. Argüello-Luengo [и др.] // Nature. — 2019. — Т. 574, № 7777. — С. 215–218. — DOI: [10.1038/s41586-019-1614-4](https://doi.org/10.1038/s41586-019-1614-4).

13. *Apolloni B., Cesa-Bianchi N., De Falco D.* A numerical implementation of “quantum annealing” // *Stochastic Processes, Physics and Geometry: Proceedings of the Ascona-Locarno Conference.* — 1990. — С. 97–111.
14. Investigating the performance of an adiabatic quantum optimization processor / K. Karimi [и др.] // *Quantum Information Processing.* — 2012. — Т. 11, № 1. — С. 77–88. — DOI: [10.1007/s11128-011-0235-0](https://doi.org/10.1007/s11128-011-0235-0).
15. *DiVincenzo D. P.* The Physical Implementation of Quantum Computation // *Fortschritte der Physik.* — 2000. — ЯНВ. — Т. 48, № 9–11. — С. 771–783. — DOI: [10.1002/1521-3978\(200009\)48:9/11<771::AID-PROP771>3.0.CO;2-E](https://doi.org/10.1002/1521-3978(200009)48:9/11<771::AID-PROP771>3.0.CO;2-E).
16. Quantum supremacy using a programmable superconducting processor / F. Arute [и др.] // *Nature.* — 2019. — Т. 574, № 7779. — С. 505–510. — DOI: [10.1038/s41586-019-1666-5](https://doi.org/10.1038/s41586-019-1666-5).
17. High-Fidelity, High-Scalability Two-Qubit Gate Scheme for Superconducting Qubits / Y. Xu [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2020. — Дек. — Т. 125, вып. 24. — С. 240503. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.125.240503](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.125.240503).
18. Demonstration of the trapped-ion quantum CCD computer architecture / J. M. Pino [и др.] // *Nature.* — 2021. — Т. 592, № 7853. — С. 209–213. — DOI: [10.1038/s41586-021-03318-4](https://doi.org/10.1038/s41586-021-03318-4).
19. Trapped-ion quantum computing: Progress and challenges / C. D. Bruzewicz [и др.] // *Applied Physics Reviews.* — 2019. — Т. 6, № 2. — С. 021314. — DOI: [10.1063/1.5088164](https://doi.org/10.1063/1.5088164).
20. *Nielsen M. A., Chuang I. L.* Quantum Computation and Quantum Information. — Cambridge, United Kingdom : Cambridge University Press, 2010. — Гл. 4.
21. Single ion qubit with estimated coherence time exceeding one hour / P. Wang [и др.] // *Nature communications.* — 2021. — Т. 12, № 1. — С. 1–8. — DOI: [10.1038/s41467-020-20330-w](https://doi.org/10.1038/s41467-020-20330-w).
22. *Cirac J. I., Zoller P.* Quantum Computations with Cold Trapped Ions // *Phys. Rev. Lett.* — 1995. — Май. — Т. 74, вып. 20. — С. 4091–4094. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.74.4091](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.4091).
23. High-Fidelity Preparation, Gates, Memory, and Readout of a Trapped-Ion Quantum Bit / T. P. Harty [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2014. — Нояб. — Т. 113, вып. 22. — С. 220501. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.113.220501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.220501).
24. High-Fidelity Universal Gate Set for ${}^9\text{Be}^+$ Ion Qubits / J. P. Gaebler [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2016. — Авг. — Т. 117, вып. 6. — С. 060505. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.117.060505](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.060505).
25. *Aliferis P., Gottesman D., Preskill J.* Accuracy threshold for postselected quantum computation // *Quantum information & computation.* — 2007. — Апр. — Т. 8. — DOI: [10.26421/QIC8.3-4-1](https://doi.org/10.26421/QIC8.3-4-1).

26. Resolved-Sideband Raman Cooling of a Bound Atom to the 3D Zero-Point Energy / C. Monroe [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 1995. — Ноябрь. — Т. 75, вып. 22. — С. 4011—4014. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.75.4011](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.4011).
27. Optimization of the Readout Fidelity of the Quantum State of an Optical Qubit in the $^{171}\text{Yb}^+$ Ion / N. V. Semenin [и др.] // Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters. — 2021. — Окт. — Т. 114, № 8. — С. 486—492. — DOI: [10.1134/S0021364021200108](https://doi.org/10.1134/S0021364021200108).
28. Определение скорости нагрева и температуры ионных цепочек в линейной ловушке Пауля по дефазировке осцилляций Раби / Н. Семенин [и др.] // Письма в ЖЭТФ. — 2022. — Июль. — Т. 116, 2 (принята к публикации).
29. *Tamir T.* Characteristic Exponents of Mathieu Functions // Mathematics of Computation - Math. Comput. — 1962. — Янв. — Т. 16. — С. 100—100. — DOI: [10.1090/S0025-5718-1962-0135739-3](https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1962-0135739-3).
30. Quantum Dynamics of Single Trapped Ions / D. Leibfried [и др.] // Reviews of Modern Physics. — 2003. — Май. — Т. 75. — DOI: [10.1103/RevModPhys.75.281](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.75.281).
31. *Mølmer K., Sørensen A.* Multiparticle Entanglement of Hot Trapped Ions // Phys. Rev. Lett. — 1999. — Март. — Т. 82, вып. 9. — С. 1835—1838. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.82.1835](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.82.1835).
32. *Magnus W.* On the exponential solution of differential equations for a linear operator // Communications on pure and applied mathematics. — 1954. — Т. 7, № 4. — С. 649—673. — DOI: [10.1002/cpa.3160070404](https://doi.org/10.1002/cpa.3160070404).
33. *Cahill K. E., Glauber R. J.* Ordered Expansions in Boson Amplitude Operators // Phys. Rev. — 1969. — Янв. — Т. 177, вып. 5. — С. 1857—1881. — DOI: [10.1103/PhysRev.177.1857](https://doi.org/10.1103/PhysRev.177.1857).
34. *Abramowitz M., Stegun I.* Handbook of Mathematical Functions. — 01.1972. — С. 784.
35. *Maslov D.* Basic circuit compilation techniques for an ion-trap quantum machine // New Journal of Physics. — 2017. — Февр. — Т. 19, № 2. — С. 023035. — DOI: [10.1088/1367-2630/aa5e47](https://doi.org/10.1088/1367-2630/aa5e47).
36. *Tamm C., Schnier D., Bauch A.* Radio-frequency laser double-resonance spectroscopy of trapped ^{171}Yb ions and determination of line shifts of the ground-state hyperfine resonance // Applied Physics B. — 1995. — Авг. — Т. 60. — С. 19—29. — DOI: [10.1007/BF01082068](https://doi.org/10.1007/BF01082068).
37. *Mårtensson-Pendrill A.-M., Gough D. S., Hannaford P.* Isotope shifts and hyperfine structure in the 369.4-nm $6s - 6p_{1/2}$ resonance line of singly ionized ytterbium // Phys. Rev. A. — 1994. — Май. — Т. 49, вып. 5. — С. 3351—3365. — DOI: [10.1103/PhysRevA.49.3351](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.49.3351).
38. *Engelke D.* Untersuchungen am 435 nm-Quadrupol-Übergang eines Ytterbium-Ions : дис. ... канд. / Engelke Dietmar. — University of Hannover, 1998.

39. *Pinnington E. H., Rieger G., Kernahan J. A.* Beam-laser measurements of the lifetimes of the $6p$ levels in Yb II // *Phys. Rev. A.* — 1997. — Сент. — Т. 56, вып. 3. — С. 2421—2423. — DOI: [10.1103/PhysRevA.56.2421](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.56.2421).
40. Beam-laser lifetime measurements for four resonance levels of Yb II / R. W. Berends [и др.] // *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics.* — 1993. — Окт. — Т. 26, № 20. — С. L701—L704. — DOI: [10.1088/0953-4075/26/20/003](https://doi.org/10.1088/0953-4075/26/20/003).
41. Lifetime and collisional depopulation of the metastable $5 D_{3/2}$ -state of Yb^+ / C. Gerz [и др.] // *Zeitschrift fur Physik D Atoms Molecules Clusters.* — 1988. — Сент. — Т. 8, № 3. — С. 235—237. — DOI: [10.1007/BF01436946](https://doi.org/10.1007/BF01436946).
42. Manipulation and detection of a trapped Yb^+ hyperfine qubit / S. Olmschenk [и др.] // *Phys. Rev. A.* — 2007. — Ноябрь. — Т. 76, вып. 5. — С. 052314. — DOI: [10.1103/PhysRevA.76.052314](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.76.052314).
43. Global entangling gates on arbitrary ion qubits / Y. Lu [и др.] // *Nature.* — 2019. — Авг. — Т. 572. — DOI: [10.1038/s41586-019-1428-4](https://doi.org/10.1038/s41586-019-1428-4).
44. Single-qubit quantum memory exceeding 10-minute coherence time / Y. Wang [и др.] // *Nature Photonics.* — 2017. — Окт. — Т. 11. — DOI: [10.1038/s41566-017-0007-1](https://doi.org/10.1038/s41566-017-0007-1).
45. *Sobelman I. I.* Radiative Transitions // *Atomic Spectra and Radiative Transitions.* — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1992. — С. 200—302. — DOI: [10.1007/978-3-642-76907-8_9](https://doi.org/10.1007/978-3-642-76907-8_9).
46. Near-Perfect Simultaneous Measurement of a Qubit Register / M. Acton [и др.] // *Quantum Information & Computation.* — 2006. — Сент. — Т. 6. — С. 465—482. — DOI: [10.26421/QIC6.6-1](https://doi.org/10.26421/QIC6.6-1).
47. *Malinovsky V., Krause J.* General theory of population transfer by adiabatic rapid passage with intense, chirped laser pulses // *Eur. Phys. J. D.* — 2001. — Май. — Т. 1450. — С. 147—155. — DOI: [10.1007/s100530170212](https://doi.org/10.1007/s100530170212).
48. Laser Phase and Frequency Stabilization Using an Optical Resonator / R. Drever [и др.] // *Appl. Phys. B.* — 1983. — Июнь. — Т. 31. — С. 97—105. — DOI: [10.1007/BF00702605](https://doi.org/10.1007/BF00702605).
49. Resolved-sideband Raman cooling of a bound atom to the 3D zero-point energy / C. Monroe [и др.] // *Physical Review Letters.* — 1995. — Т. 75, № 22. — С. 4011—4014. — ISSN 00319007. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.75.4011](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.4011).
50. *James D.* Quantum dynamics of cold trapped ions with application to quantum computation // *Applied Physics B: Lasers and Optics.* — 1998. — Февр. — Т. 66, № 2. — С. 181—190. — DOI: [10.1007/s003400050373](https://doi.org/10.1007/s003400050373).
51. *Scully M. O., Zubairy M. S.* Atom-field interaction – semiclassical theory // *Quantum Optics.* — Cambridge University Press, 1997. — С. 145—192. — DOI: [10.1017/CB09780511813993.007](https://doi.org/10.1017/CB09780511813993.007).