

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»  
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау  
Кафедра квантовой радиофизики

**Направление подготовки / специальность:** 03.04.01 Прикладные математика и физика  
(магистратура)

**Направленность (профиль) подготовки:** Квантовая радиофизика

## **МЕТОДЫ МАСШТАБИРОВАНИЯ КВАНТОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА ИОНАХ ИТТЕРБИЯ**

(магистерская диссертация)

**Студент:**

Сидоров Павел Леонидович

---

*(подпись студента)*

**Научный руководитель:**

Колачевский Николай Николаевич,  
д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. РАН

---

*(подпись научного руководителя)*

**Консультант (при наличии):**

---

*(подпись консультанта)*

Москва 2020

## Содержание

<b>Введение .....</b>	<b>2</b>
<b>1. Поведение ионов в ловушке Пауля .....</b>	<b>7</b>
1.1 Одиночный ион в ловушке Пауля .....	8
1.2 Несколько ионов в линейной ловушке .....	10
1.3 Фазовые переходы в ионных кристаллах .....	12
<b>2. Поведение ионов в случае нескольких центров захвата .....</b>	<b>15</b>
2.1 Общий случай матрицы из N ловушек Пауля .....	15
2.2 Частный случай планарной ловушки .....	17
<b>3. Неадиабатические квантовые операции на ионах .....</b>	<b>20</b>
3.1 Когерентные состояния .....	22
3.2 Операция перепутывания двух ионов при помощи неадиабатического фазового гейта .....	23
3.3 Реализация операции перепутывания на ионах иттербия .....	30
<b>4. Численное моделирование эксперимента по перепутыванию ионов иттербия в планарной ловушке .....</b>	<b>35</b>
4.1 Расчёт параметров планарной ловушки .....	35
4.2 Оценка достоверности операции перепутывания двух ионов иттербия в планарной ловушке .....	37
<b>Заключение .....</b>	<b>41</b>

## Введение

Квантовые вычисления, как и классические, представляют собой манипуляции с объектами, имеющими дискретный набор состояний, например,  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ , однако с уменьшением размеров используемых объектов начинают проявляться их квантовые свойства: так, квантовая система может находиться в суперпозиции состояний и при измерении принимать собственное состояние  $|0\rangle$  или  $|1\rangle$  с определённой вероятностью. В таком случае состояние объекта запишется как  $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ , где  $a$  и  $b$  – комплексные числа, называемые амплитудами вероятности. При измерении такого состояния с вероятностью  $|a|^2$  система окажется в состоянии  $|0\rangle$  и с вероятностью  $|b|^2 = 1 - |a|^2$  в состоянии  $|1\rangle$ . В отличие от классического бита, как элементарной единицы информации, такая система называется кубитом. Если представить коэффициенты в виде  $a = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ ;  $b = e^{i\phi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ , то произвольное состояние удобно представить в виде вектора на сфере Блоха (Рис.1), где  $\theta$  и  $\phi$  – сферические координаты конца вектора.

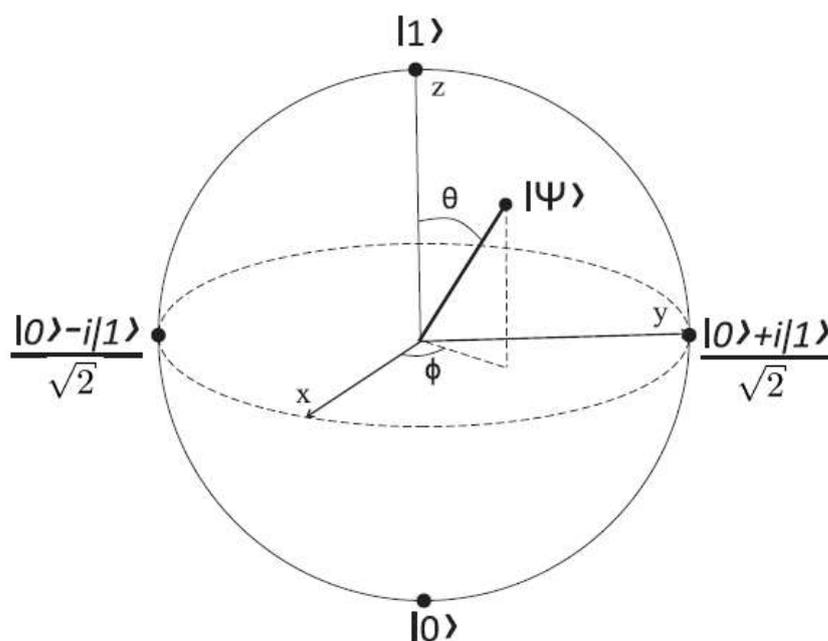


Рис. 1 Сфера Блоха

С помощью внешних воздействий можно вызвать смещение вектора состояния по сфере Блоха, что называется однокубитной операцией или однокубитным гейтом (вентилем). Действие операции можно описать как линейный унитарный оператор. Простейшими однокубитными операциями являются: отрицание с матрицей преобразования

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

действие которого аналогично замене  $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ ; фазовый сдвиг с матрицей преобразования

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

представляющего собой поворот в плоскости  $(x, y)$  на угол  $\pi$ , (так, состояние  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$  перейдёт в  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$ ); а так же так называемое преобразование Адамара

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

которое при действии на собственные состояния приводит к смещению соответствующего вектора в экваториальную плоскость, например  $|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ .

С увеличением числа кубитов появляется ещё одно существенное отличие от поведения классических битов. Могут возникать такие ситуации, что при описании состояния двух кубитов невозможно указать, в каком состоянии находится каждый из них в отдельности. Рассмотрим, например, состояние

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle), \quad (4)$$

которое не является тензорным произведением никаких двух однокубитных состояний, при этом любое измерение состояния одного из кубитов будет

немедленно приводить к коллапсированию состояния (4) и согласованному изменению состояний обоих кубитов. Такие состояния называются перепутанными. Перепутанные состояния лежат в основе парадокса Эйнштейна – Подольского – Розена [1], в течение долгого времени являвшегося камнем преткновения целого ряда ученых. Явление перепутанности является одним из ключевых факторов, обуславливающих преимущество квантовых вычислителей над классическими при решении ряда задач [2].

Действие двухкубитных операций можно задать с помощью матрицы  $4 \times 4$ , причём для получения вектора состояния кубитов, зная состояния каждого из них, необходимо найти тензорное произведение двух векторов:

$$|\psi_1\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle) = ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle = \begin{pmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{pmatrix} \quad (5)$$

Для двух кубитов можно предложить гораздо более сложные операции, например, одной из важнейших двухкубитных операций является CNOT – контролируемое отрицание, задающееся матрицей

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

что для базисных состояний даёт следующее преобразование:

$$|00\rangle \rightarrow |00\rangle, \quad (7)$$

$$|01\rangle \rightarrow |01\rangle, \quad (8)$$

$$|10\rangle \rightarrow |11\rangle, \quad (9)$$

$$|11\rangle \rightarrow |10\rangle. \quad (10)$$

Как видно, второй кубит меняет состояние только когда первый кубит находится в состоянии  $|1\rangle$ , то есть первый кубит контролирует выполнение операции отрицания на втором кубите.

Можно показать, что с помощью CNOT и однокубитных операций можно приблизить любое унитарное преобразование с любой наперёд заданной точностью [3]. Такие системы операторов называются универсальными.

Перед проведением квантового вычисления в квантовый регистр, как и в классический регистр процессора, записывается начальное состояние, то есть инициализируется состояние каждого из кубитов, составляющих регистр. Затем к системе кубитов применяются серии однокубитных, двухкубитных, а иногда и трёхкубитных операций. Цепочки операций из нескольких операторов часто записываются в виде квантовых схем (Рис.2).

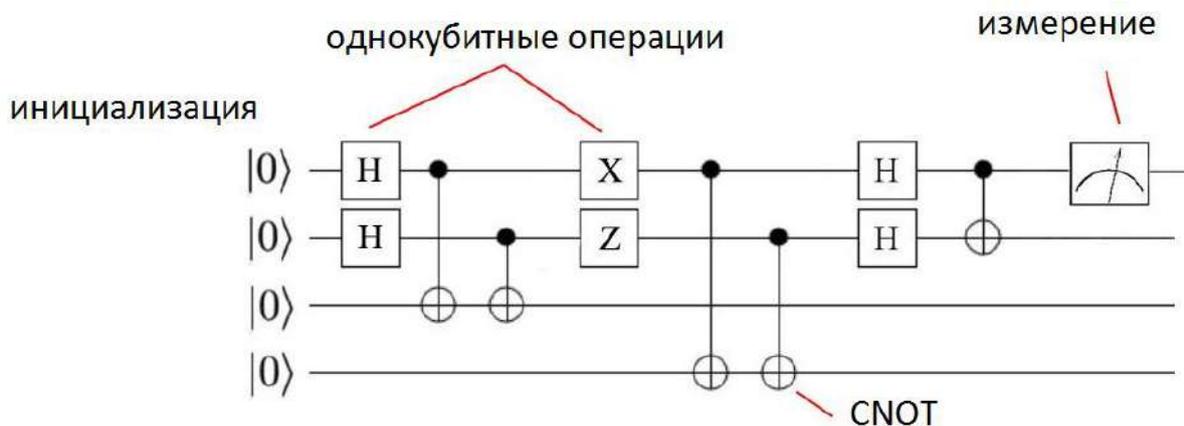


Рис. 2. Пример схемы квантового вычисления

В конце или на промежуточных этапах вычисления может производиться измерение состояния. Из-за того, что коэффициенты, определяющие суперпозицию квантового состояния, в процессе операции преобразуются одновременно и, более того, некоторые из них коррелированы из-за наличия пар перепутанных кубитов, квантовое вычисление обладает параллелизмом, тогда как классические вычисления не являются параллельными без введения

дополнительных процессоров. Квантовые алгоритмы потенциально позволят решать определённые практические задачи гораздо быстрее известных классических алгоритмов. Например, алгоритм Шора [4] для разложения числа на простые множители может найти применение в современной криптографии, а алгоритм Гровера [5] даёт возможность быстрого перебора для поиска решения уравнения  $f(x) = 1$ , где  $f(x)$  – логическая функция от многих переменных.

На данный момент существуют реализации кубитов на захваченных в ловушку ионах [6-8], атомах в оптических решётках [9,10], фотонах [11], сверхпроводниках [12,13], квантовых точках [14,15] и др. Так же существуют полноценные квантовые компьютеры на сверхпроводниках из 50 кубитов и на ионах из 17 кубитов [16,17]. При построении квантового компьютера возникает ряд проблем, наиболее важными из которых являются сложность повышения точности отдельной операции, неидеальность кубита (со временем реальные квантовые объекты теряют когерентность из-за взаимодействия с окружением и из-за внутренних причин, например, распадов) и масштабируемость. Из-за конечности времени когерентности можно провести лишь конечное количество операций подряд. Для захваченных в ловушку ионов время может достигать порядка нескольких секунд [18] при характерных временах операций порядка нескольких микросекунд, что приводит к максимальному отношению времени когерентности к времени операции среди наиболее распространенных платформ для квантовых вычислений (до  $10^6$ ).

В качестве объекта исследований можно выделить однократно заряженный ион изотопа  $^{171}\text{Yb}$ . Данный изотоп имеет ненулевой спин ядра, поэтому можно использовать компоненты сверхтонкого расщепления в качестве кубитных состояний. Так же стоит отметить высокое время когерентности такого кубита и простоту уровней, позволяющую

манипулировать состояниями, используя один промышленный импульсный лазер с длиной волны 355 нм.

В данной работе рассмотрена проблема масштабирования квантовых вычислений на примере  $^{171}\text{Yb}^+$ , а также произведено численное моделирование эксперимента по перепутыванию пары ионов иттербия в планарной ловушке в присутствии соседних ионов.

# 1. Поведение ионов в ловушке Пауля

Для проведения квантовых операций на ионах необходимо локализовать их в некоторой области пространства, что может быть сделано с помощью специальных конфигураций электрических и магнитных полей, при этом в статическом электрическом поле заряд может находиться лишь в неустойчивом равновесии (теорема Ирншоу), однако с помощью переменного неоднородного электрического поля или комбинации электрического и магнитных полей можно обеспечить удержание иона в достаточно малой области пространства. Ловушки первого типа называют радиочастотными ловушками или ловушками Пауля. Их заметным преимуществом перед ловушками Пеннинга является отсутствие нежелательного сдвига уровней из-за эффекта Зеемана в магнитном поле.

## 1.1 Одиночный ион в ловушке Пауля

Рассмотрим одиночный ион в ловушке. Для того, чтобы сила, действующая на ион, зависела от расстояния до центра ловушки линейно и приводила к гармоническим колебаниям, необходима квадратичная зависимость скалярного потенциала  $\Phi(x, y, z)$  от координат [19], т.е.

$$\Phi = C \cdot (ax^2 + by^2 + cz^2). \quad (1.1)$$

В силу теоремы Лапласа  $\Delta\Phi = 0$ , что приводит к ограничению на форму потенциала, которое задаётся выражением

$$a + b + c = 0. \quad (1.2)$$

Наиболее важными случаями являются  $a = 1, b = -1, c = 0$  – т.н. линейная квадрупольная конфигурация и  $a = b = 1, c = -2$  – трёхмерная квадрупольная конфигурация. Первый случай приводит к потенциальной

поверхности седловидной формы, задаваемой функцией  $\Phi = C \cdot (x^2 - y^2)$  и изображённой на Рис. 3. Видно, что при постоянной  $C$  ион удерживается только вдоль одного направления. Если внести периодическую зависимость от времени  $C = C_1 + C_2 \cos(\omega t)$ , седловидная поверхность будет совершать «дышащее» движение с периодической сменой типа экстремума вдоль осей. Исследование уравнений движения в таком потенциале приводит к

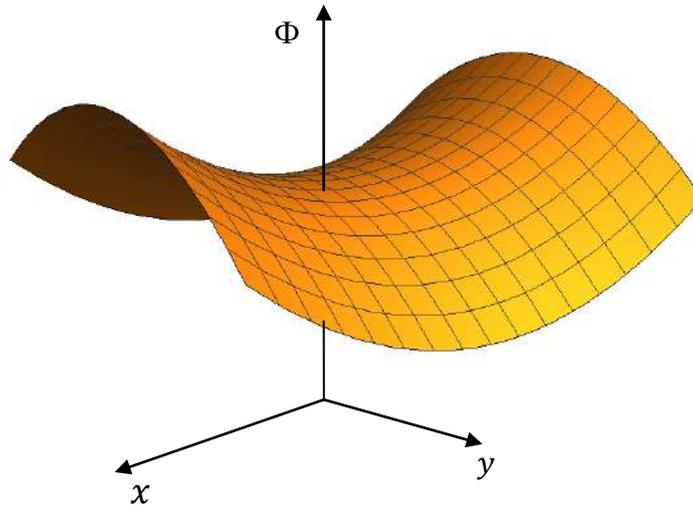


Рис. 3. Форма потенциала  $C \cdot (x^2 - y^2)$

дифференциальным уравнениям Матье[20,21], однако можно показать качественно, что в среднем на ион будет действовать слабая удерживающая сила, направленная к центру ловушки. Данная идея применима и к другим конфигурациям радиочастотных ловушек.

Вначале рассмотрим ион с массой  $M$  и зарядом  $Z$  в однородном переменном электрическом поле с амплитудой  $\hat{E}$  и частотой  $\omega$ , и пусть в начальный момент времени ион находился в покое на расстоянии  $\hat{x}$  от центра ловушки. Интегрирование классического уравнения движения даст зависимость координаты от времени:

$$x(t) = \hat{x} - \frac{Ze\hat{E}}{M\omega^2} \cos(\omega t). \quad (1.3)$$

Таким образом, ион совершает осцилляции на частоте приложенного поля, отставая от него по фазе на  $\pi$ , также называемые микродвижением. Заметим,

что среднее значение силы  $F(t) = Ze\hat{E}\cos(\omega t)$ , действующей на ион, равно 0. Если теперь снять ограничение однородности поля и разложить силу в точке  $\hat{x}$ , используя выражение (1.3), получим

$$F(t) \approx ZeE(\hat{x})\cos(\omega t) + Ze\frac{dE(\hat{x})}{dx}(x - \hat{x})\cos(\omega t) \approx ZeE(\hat{x})\cos(\omega t) - \frac{Z^2e^2E(\hat{x})}{M\omega^2}\frac{dE(\hat{x})}{dx}\cos^2(\omega t) \quad (1.4)$$

для малых смещений  $x - \hat{x}$  за период колебаний поля. Усреднение (1.4) по времени даст среднюю силу, действующую на ион

$$F_{\text{cp}}(\hat{x}) = -\frac{Z^2e^2E(\hat{x})}{2M\omega^2}\frac{dE(\hat{x})}{dx} \quad (1.5)$$

и направленную к центру ловушки, так, для потенциала, изображённого на Рис. 3, сила принимает вид  $F_{\text{cp}}(\hat{x}) = -\frac{2cZ^2e^2}{M\omega^2}\vec{r}$ . Можно ввести так называемый псевдопотенциал, определяющий силу (1.5):

$$\Psi_T(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{ZeE^2(\hat{x}, \hat{y})}{4M\omega^2}, \quad (1.6)$$

в котором ион совершает медленные колебания. Их частоту можно определить из закона сохранения энергии:

$$Ze\Psi_T = \frac{1}{2}M\omega^2(x^2 + y^2). \quad (1.7)$$

## 1.2 Несколько ионов в линейной ловушке

Для создания квантового компьютера, способного решать, например, задачу факторизации больших чисел быстрее классического компьютера, требуется возможность манипулирования состояниями большого числа кубитов, то есть необходимо иметь порядка нескольких тысяч локализованных ионов с возможностью взаимодействия с каждым отдельно взятым ионом.

При поимке нескольких ионов в линейную ловушку Пауля из-за наличия псевдопотенциала ловушки и кулоновского взаимодействия ионы образуют так называемый ионный кристалл. Для того, чтобы найти положения равновесия ионов в таком линейном ионном кристалле, исследуем потенциальную энергию взаимодействия системы из  $N$  ионов в ловушке [22]:

$$V = \sum_{m=1}^N \frac{1}{2} M \omega^2 x_m(t)^2 + \sum_{\substack{n,m=1 \\ m \neq n}}^N \frac{kZ^2 e^2}{2} \frac{1}{|x_n(t) - x_m(t)|}, \quad (1.8)$$

где  $M, Z$  – масса и заряд каждого иона,  $e$  – заряд электрона и  $k \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$

. Для малых смещений от положения равновесия можно записать

$$x_m(t) \approx x_m^{(0)} + q_m(t), \quad (1.9)$$

где  $x_m^{(0)}$  – положение равновесия  $m$ -ого иона. Положения равновесия можно найти как экстремумы потенциальной энергии:

$$\left[ \frac{\partial V}{\partial x_m} \right]_{x_m = x_m^{(0)}} = 0. \quad (1.10)$$

Можно ввести безразмерные положения равновесия как  $u_m = x_m^{(0)} / l$ , где

$$l^3 = \frac{kZ^2 e^2}{M \nu^2}. \quad (1.11)$$

Тогда уравнения (1.10) переписутся в виде

$$u_m - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{(u_m - u_n)^2} + \sum_{n=m+1}^N \frac{1}{(u_m - u_n)^2} = 0, \quad (1.12)$$

где  $m$  пробегает значения от 1 до  $N$ .

Экстраполяция данных численного моделирования при разных значения  $N$  [22] при решении уравнений (1.12) даёт следующее выражение для вычисления минимального расстояния между ионами в цепочке (для центральных ионов):

$$u_{min}(N) \approx \frac{2.018}{N^{0.559}}, \quad (1.13)$$

что для ловушки с частотой  $\omega = 1$  МГц с  $N = 100$  ионами  $^{171}\text{Yb}^+$  даёт  $u_{min} \approx 1.5$  мкм, а для  $N = 500$  расстояние становится равным  $\approx 500$  нм, что сравнимо с длиной волны оптического излучения. Другие эмпирические формулы дают похожие результаты, как, например, оценка, основанная на жидкостном представлении ионного облака [23]:

$$u_{min}(N) = 1.92N^{-2/3} \ln(aN)^{1/3}, \quad (1.14)$$

где  $a \approx 0.794$ .

### 1.3 Фазовые переходы в ионных кристаллах

В выражении (1.8) для потенциальной энергии ионов опущены слагаемые, связанные с наличием удерживающего потенциала вдоль осей, перпендикулярных оси ловушки, и предполагаются равными нулю, то есть ионы выстроены в идеальную цепочку вдоль оси ловушки. Запишем теперь полную потенциальную энергию  $N$  ионов с учётом трёх осей:  $z$  – вдоль оси ловушки и  $x, y$  – перпендикулярно оси [24]:

$$U = kZ^2 e^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \left[ \frac{1}{r_{ij}} + \frac{1}{2l_{xy}^3} [x_i^2 + y_i^2 + \alpha z_i^2] \right], \quad (1.15)$$

где  $l_{xy}^3 = \frac{kZ^2 e^2}{M\omega_{xy}^2}$ ,  $r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$ ,  $\omega_{xy}$  – радиальная частота колебаний ионов,  $\alpha = \omega_z^2 / \omega_{xy}^2$ . Введя безразмерные координаты,  $x' = x/l_{xy}$ , получим

$$U = \frac{kZ^2 e^2}{l_{xy}} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \left[ \frac{1}{r'_{ij}} + [x_i'^2 + y_i'^2 + \alpha z_i'^2] \right]. \quad (1.16)$$

Минимум данной функции зависит только от параметра  $\alpha$ , при этом конфигурация ионов в виде линейной цепочки даёт минимум лишь

приближённо и для малых значений  $\alpha$ . Численное исследование минимума данного выражения при разных значениях  $\alpha$  показывает, что существует несколько различных конфигураций ионов, переходящих в друг друга. Такие переходы также называют фазовыми переходами в ионных кристаллах.

Существует три типа фазовых переходов (Рис.4): (а) из линейной цепочки ионов в двумерную зигзагообразную конфигурацию; (б) из двумерной зигзагообразной конфигурации в трёхмерную, то есть зигзагообразный рисунок перестаёт лежать в одной плоскости; (в) из трёхмерной конфигурации в двумерную, в диск, расположенный в плоскости  $x - y$ .

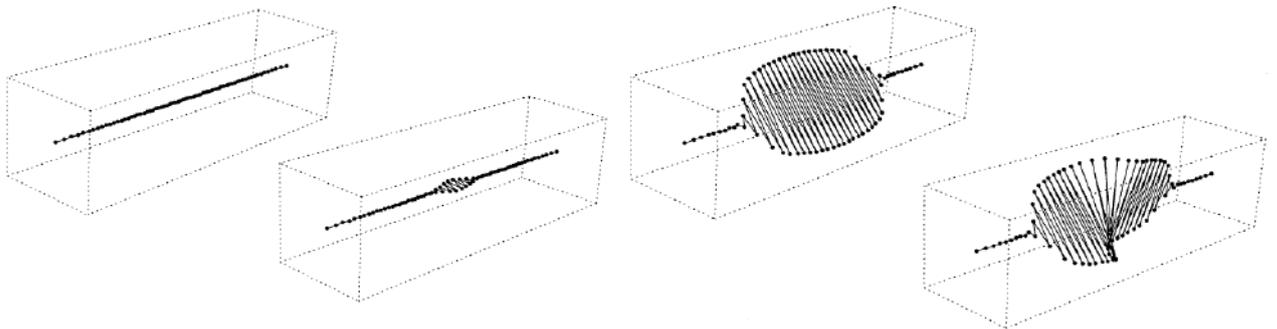


Рис. 4. Устойчивые конфигурации 70 ионов для значений  $\alpha = (1.52, 1.56, 2.17, 3.13) \times 10^{-3}$ . Масштаб по осям  $x$  и  $y$  увеличен по сравнению с осью  $z$  в 100 раз. Использовано изображение из статьи [24].

Если построить график зависимости (Рис. 5) максимального радиуса цепочки ионов, поделённого на минимальное расстояние между ионами вдоль оси  $z$   $\frac{\max(\sqrt{x^2+y^2})}{d_{min}}$ , где максимум берётся по всем ионам, от  $\alpha$ , то можно заметить, что рассмотренные переходы действительно являются фазовыми, т.е. можно определить характерное критическое значение параметра  $\alpha_{кр}$ , при котором происходит значительная смена конфигурации (в данном случае переход цепочка – зигзаг).

Данные фазовые переходы также наблюдались экспериментально [25,26]. Исследование поведения переходов при изменении числа ионов  $N$  приводит к важному свойству – степенной зависимости критического параметра от  $N$ :

$$\alpha_{кр} = cN^\beta, \quad (1.17)$$

где константы  $c \approx 3.23, \beta \approx -1.83$  согласно экспериментальным данным [26]. Таким образом, для большого числа ионов требуется более сильная анизотропия потенциала с сильным удержанием в радиальном направлении для сохранения линейной конфигурации ионов. При анизотропии слабее, чем  $\alpha_{кр}$ , цепочка перестаёт быть линейной, и часть ионов выстраивается в виде зигзага, выходя за пределы цепочки. Так, при наличии 1000 ионов в ловушке необходимо отношение секулярных частот перпендикулярно оси и вдоль оси более, чем 300:1, что накладывает существенные ограничения на геометрию ловушки.

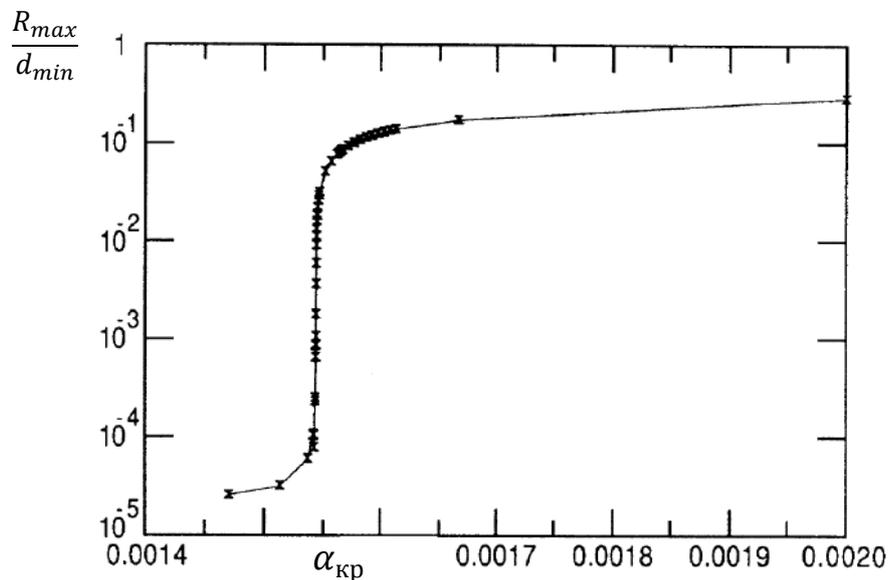


Рис. 5. График зависимости максимального радиуса зигзагообразной цепочки ионов от параметра анизотропии ловушки. Изображение взято из статьи [24].

## 2. Поведение ионов в случае нескольких центров захвата

Увеличение числа ионов в одной ловушке, как было показано ранее, приводит к их сближению, что увеличивает взаимодействие и уменьшает время операции перепутывания, однако значительно затрудняет оптическую адресацию отдельных ионов для, например, проведения однокубитных операций, так как диаметр сфокусированного лазерного пучка ограничен дифракцией. Более того, линейная конфигурация ионов нарушается при достижении параметра анизотропии критического значения, что неизбежно произойдет, начиная с некоторого количества ионов. Одним из решений данной проблемы является использование нескольких ловушек, в каждой из которых по одному иону. Систему таких ловушек можно выстроить в ряд или “матрицу”.

### 2.1 Общий случай матрицы из $N$ ловушек Пауля

Рассмотрим  $N$  ионов, расположенных в узлах матрицы из ловушек Пауля. Как и любая механическая система, данная система ионов будет иметь набор нормальных колебаний (мод) с соответствующими частотами. Число таких мод равно числу степеней свободы системы. Например, для матрицы из ловушек  $3 \times 3$  число таких мод равно 27. В дальнейшем будем рассматривать только колебания вдоль двух осей параллельных плоскости расположения ловушек, т.е. 18 колебаний в данном случае. Будем считать, что каждая ловушка представляет собой псевдопотенциал  $\Psi_T(x, y)$  ( $x, y$  отсчитываются от центра ловушки), в котором ион совершает колебания, испытывая силы Кулона со стороны ионов в других ловушках. Положения равновесия ионов можно найти численно, решив систему дифференциальных уравнений колебаний ионов с затуханием. Введение параметра затухания  $\gamma$  в систему позволит найти положения равновесия, как значения координат при больших временах. Уравнения запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned}
M\ddot{x}_{mn} &= \sum_{\substack{p=1 \\ q=1 \\ \{p \neq m, q \neq n\}}}^{P,Q} \frac{k(x_{mn} - x_{pq})Z^2 e^2}{\left[ (x_{mn} - x_{pq})^2 + (y_{mn} - y_{pq})^2 \right]^{3/2}} \\
&\quad + Ze \frac{\partial \Psi_T(x, y)}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_{mn}-mx_0 \\ y=y_{mn}-ny_0}} + \gamma \dot{x}_{mn}, \\
M\ddot{y}_{mn} &= \sum_{\substack{p=1 \\ q=1 \\ \{p \neq m, q \neq n\}}}^{P,Q} \frac{k(y_{mn} - y_{pq})Z^2 e^2}{\left[ (x_{mn} - x_{pq})^2 + (y_{mn} - y_{pq})^2 \right]^{3/2}} + Ze \frac{\partial \Psi_T(x, y)}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x_{mn}-mx_0 \\ y=y_{mn}-ny_0}} \\
&\quad + \gamma \dot{y}_{mn}, \tag{2.1}
\end{aligned}$$

где  $P \times Q$  – размерность матрицы из ловушек,  $m, n$  – натуральные числа от 1 до  $P$  и от 1 до  $Q$ , соответственно,  $k \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$ ,  $Z, m$  – заряд и масса иона,  $x_{ab}, y_{ab}$  – абсолютные координаты иона в ловушке с координатами центра  $(ax_0, by_0)$ . Численное решение этой системы даёт положения равновесия ионов  $(x_{mn0}, y_{mn0})$ . Теперь, чтобы найти нормальные колебания, рассмотрим потенциальную энергию системы:

$$\begin{aligned}
U(x_{11}, y_{11}, \dots, x_{PQ}, y_{PQ}) &= \sum_{\substack{m=1 \\ n=1}}^{P,Q} Ze \Psi(x_{mn} - mx_0, y_{mn} - ny_0) \\
&\quad + \sum_{\substack{m=1, n=1 \\ p=1, q=1, \\ \{m \neq p, n \neq q\}}}^{P,Q} \frac{kZ^2 e^2}{2 \sqrt{(x_{mn} - x_{pq})^2 + (y_{mn} - y_{pq})^2}}. \tag{2.2}
\end{aligned}$$

Для малых смещений

$$U = U(x_{110}, y_{110}, \dots, x_{PQ0}, y_{PQ0}) + \frac{1}{2} D_{x_{mn} y_{pq}} \begin{pmatrix} x_{11} - x_{110} \\ \vdots \\ y_{PQ} - y_{PQ0} \end{pmatrix},$$

где  $D_{x_{mn}y_{pq}}$  – матрица  $2 \cdot P \cdot Q \times 2 \cdot P \cdot Q$  вторых производных потенциальной энергии по координатам ионов, взятых в точке  $(x_{mn0}, y_{mn0})$ . Можно показать, что собственные значения матрицы  $\frac{D_{x_{mn}y_{pq}}}{M}$  являются квадратами частот мод нормальных колебаний ионов, а собственные вектора описывают вклад данной моды в произвольное колебание. Этот набор параметров также может быть найден численно.

## 2.2 Частный случай планарной ловушки

Для реализации такого типа захвата ионов часто применяют планарные ловушки, как, например, конфигурация электродов, показанная на Рис. 6. На слой диэлектрика, представляющего собой, к примеру, обычную печатную плату, наносится проводящий полигон, имеющий нулевой потенциал, а к кольцевым областям прикладывается радиочастотный потенциал  $V \cos(\Omega t)$ .

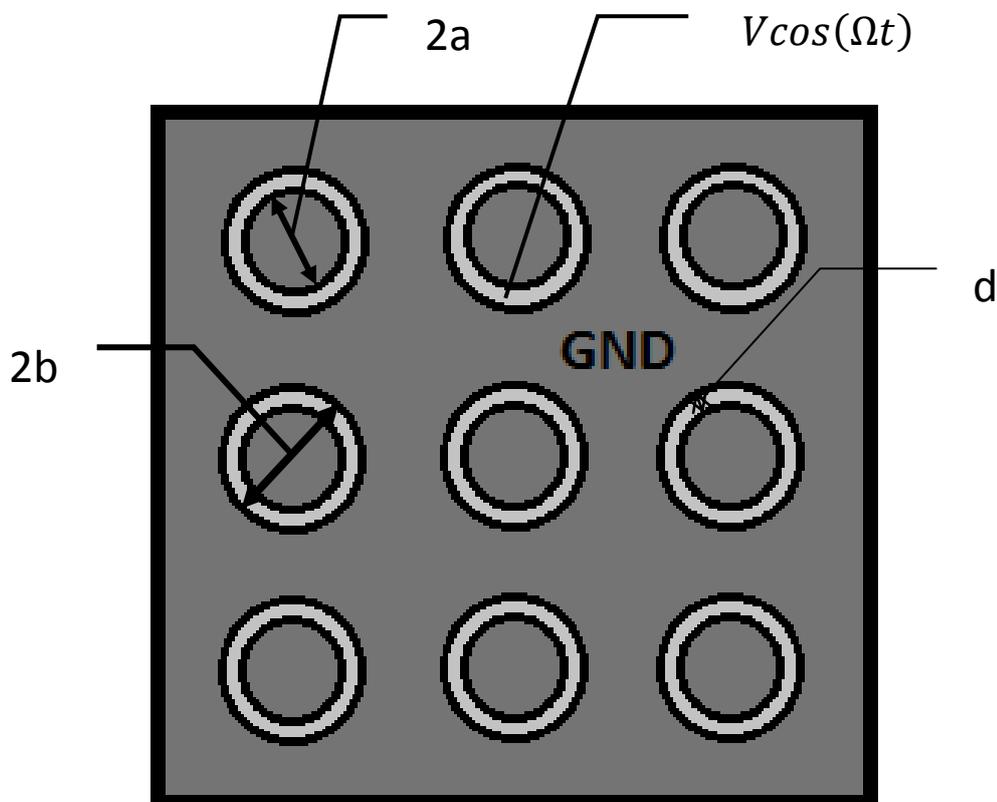


Рис. 6. Пример планарной ловушки

Над такими кольцевыми областями образуется псевдопотенциал, имеющий минимум в некоторой точке  $z_0$  на оси кольца, что приводит к удержанию ионов. Скалярный потенциал для любой точки  $(z, \rho)$  в такой конфигурации запишется в виде [27]:

$$\phi(z, \rho) = \int_0^\infty A(k) e^{-kz} J_0(k\rho) dk, \quad (2.3)$$

где  $A(k)$  – коэффициент, определяемый из граничных условий,  $J_0(k\rho)$  – функция Бесселя. Можно заметить, что на поверхности полигона

$$\phi(0, \rho) = \begin{cases} 0, & \rho < a \\ V \cos(\Omega t), & a \leq \rho \leq b. \\ 0, & \rho > b \end{cases} \quad (2.4)$$

Отсюда получаем

$$A(k) = V[bJ_1(kb) - dJ_1(kd)], \quad (2.5)$$

где  $d = b - a$ . Потенциал на оси можно получить, вычислив интеграл (2.3) аналитически:

$$\phi(z) = V \left[ \frac{1}{\sqrt{1+(d^2/z^2)}} - \frac{1}{\sqrt{1+(b^2/z^2)}} \right]. \quad (2.6)$$

Из выражения (1.6) можно найти потенциальную энергию иона

$$Ze\Psi_T(z) = \frac{z^2 e^2 \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2}{4M\omega^2}, \quad (2.7)$$

имеющую минимум в точке

$$z_0 = \sqrt{\frac{b^{4/3}d^{4/3}}{b^{2/3}+d^{2/3}}}. \quad (2.8)$$

В дальнейшем для вычисления секулярной частоты потенциал можно разложить в ряд Тейлора в точке минимума.

Псевдопотенциал в плоскости, перпендикулярной оси, запишется в виде

$$\Psi_T(x, y) = \frac{Ze}{4M\omega^2} \left( \frac{\partial \phi}{\rho \partial \rho} \right)^2 (x^2 + y^2). \quad (2.9)$$

Используя выражение (2.3) и свойство функций Бесселя

$$J_{n+1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J'_n(x), \quad (2.10)$$

получим для производной  $\frac{\partial \phi}{\partial \rho}$ :

$$\phi_\rho = \int_0^\infty A(k) e^{-kz} (-J_1(k\rho)) k dk. \quad (2.11)$$

Для того, чтобы найти первое слагаемое в разложении Тейлора по степеням  $\rho$ , найдём первую производную данной функции по  $\rho$  в точке  $\rho_0 = 0$ . Применяя свойство (2.10) ещё раз, получаем

$$\begin{aligned} \phi_{\rho\rho} |_{\rho_0=0} &= \int_0^\infty A(k) e^{-kz} \left( J_2(k\rho) - \frac{J_1(k\rho)}{k\rho} \right) |_{\rho_0=0} k^2 dk = \\ &= \int_0^\infty -\frac{1}{2} A(k) e^{-kz} k^2 dk = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi(z,0)}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Отсюда следует, что в точке удержания при малых смещениях иона  $\phi_\rho \sim \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi(z,0)}{\partial z^2} \right) |_{z=z_0} * \rho$ , что приводит к выражению для псевдопотенциала в плоскости  $(x, y)$  при  $\rho = 0$ , выраженному через производную известной функции (2.6):

$$\Psi_T(x, y) = \frac{Ze}{16M\omega^2} \left[ \left( \frac{\partial^2 \phi(z,0)}{\partial z^2} \right) |_{z=z_0} \right]^2 (x^2 + y^2), \quad (2.13)$$

откуда можно определить секулярную частоту в плоскости  $(x, y)$ .

### 3. Неадиабатические квантовые операции на ионах

Перейдём теперь к рассмотрению квантовых операций на ионах (в частности, захваченных в массив из ловушек). Большинство операций, приводящих к перепутыванию двух ионов, таких как Cirac - Zoller gate, Mølmer – Sørensen gate и т.д., являются адиабатическими по отношению к периоду колебаний ионов, т.к. предполагают спектральное разрешение колебательных мод, что, таким образом, ограничивает время операции перепутывания временами порядка нескольких периодов колебаний. Кроме того, увеличение числа ионов затрудняет разрешение спектра колебательных мод из-за его усложнения. Наряду с адиабатическим методом перепутывания ионов можно предложить неадиабатический, когда к ионам прикладываются силы, время действия которых мало по сравнению с периодом колебаний, так, что возбуждается несколько колебательных мод, и во время взаимодействия ионы ведут себя как неподвижные частицы. При этом, подбирая параметры, такие как направления действия сил, моменты времени и т.д., можно обеспечить зависимость действия силы от внутреннего состояния ионов, и серия таких быстрых толчков приведёт к приобретению дополнительной фазы, зависящей от внутренних состояний ионов, и полной перепутанности. Данная идея была предложена теоретически в 2003 году [28].

Рассмотрим одиночный ион с массой  $m$ , колеблющийся с частотой  $\nu$  в ловушке с внутренними состояниями  $|0\rangle, |1\rangle$ , которые так же являются логическими состояниями кубита, взаимодействующий с резонансным с переходом  $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$  оптическим полем, имеющим волновой вектор  $\vec{k}$ .

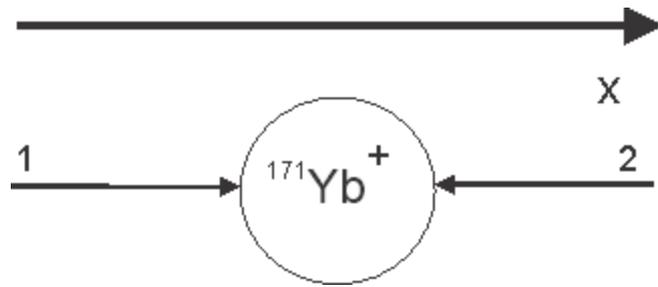


Рис. 7. Ион иттербия под воздействием двух быстрых импульсов, распространяющихся навстречу друг другу

Рассмотрим два вида процессов: поочерёдное воздействие на ион парой мгновенных (по сравнению с периодом колебаний иона)  $\pi$ -импульсов 1 и 2 (Рис.7) (процесс (а)), и свободную эволюцию – когда лазер выключен (процесс (б)). Положим, что ион находится в состоянии  $|0\rangle$ . Тогда импульс 1 приводит к поглощению фотона и смене состояния иона на  $|1\rangle$ . При этом ион получает толчок вдоль оси  $x$  вдоль направления действия импульса, получая импульс  $+\Delta p$ . Действие импульса 2 приводит к смене состояния иона на  $|0\rangle$  и излучению фотона вдоль импульса 2 и против оси  $x$ , т.е. ион получает импульс вдоль оси  $x$ , равный  $+\Delta p$ . Таким образом, после приложения такой пары импульсов состояние иона не поменялось, и частицей был получен импульс  $+2\Delta p$ . Теперь положим, что ион находился в состоянии  $|1\rangle$ , тогда действие импульса 1 приведёт, наоборот, к излучению фотона в направлении его действия и передаче импульса иону против оси  $x$ , и, аналогично, – импульс 2 также передаст импульс против оси. Приходим к важному результату – зависимости величины передаваемого импульса от состояния иона ( $+2z\Delta p$  для состояния  $|0\rangle$ , и  $-2z\Delta p$  для состояния  $|1\rangle$ , где  $z$  – количество таких пар импульсов). Данные рассуждения не являются строгими и то, как именно передаётся импульс, зависит от многих факторов и требует рассмотрения конкретной реализации (одна из них будет рассмотрена ниже на базе иона  $^{171}\text{Yb}^+$ ). Однако они приводят к оператору эволюции  $e^{-2iz\vec{k}\vec{r}\sigma^z}$ , действие которого повторяет рассмотренный процесс. Здесь  $\vec{r}$  – оператор координаты иона, а  $\sigma^z$  – матрица Паули.

### 3.1 Когерентные состояния

В дальнейшем для формального описания действия данного гейта потребуется понятие когерентного состояния колебаний, которое является «наиболее классическим» описанием квантового поведения осциллятора. Когерентное состояние задаётся комплексным числом  $\alpha$  и является собственным состоянием оператора уничтожения:

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (3.1)$$

Т.к. оператор  $a$  не является эрмитовым,  $\alpha$  – не наблюдаемая величина. Однако действительная и мнимая часть  $\alpha$  являются, соответственно, операторами координаты и импульса для состояния  $|\alpha\rangle$ :

$$\frac{1}{2x_0}\langle\alpha|\hat{x}|\alpha\rangle = \alpha_R, \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{2p_0}\langle\alpha|\hat{p}|\alpha\rangle = \alpha_I, \quad (3.3)$$

где  $x_0 = \sqrt{\hbar/2m\omega}$  и  $p_0 = \sqrt{m\omega\hbar/2}$  и  $\omega$  – частота осциллятора. Выражение (3.1) также позволяет найти вид когерентного состояния в базисе чисел заполнения, т.е. числа фононов:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (3.4)$$

При этом, если применить оператор свободной эволюции  $e^{-i\omega_{trap}ta+a}$  к выражению (3.4), получим

$$|\alpha\rangle \rightarrow |\alpha e^{-i\omega t}\rangle. \quad (3.5)$$

Когерентное состояние  $|\alpha\rangle$  можно преобразовать в новое когерентное состояние  $|\alpha + \beta\rangle$  действием оператора сдвига

$$D[\beta] = e^{\beta a^+ - \beta^* a}, \quad (3.6)$$

при этом

$$D[\alpha]|0\rangle = |\alpha\rangle. \quad (3.7)$$

Используя формулу Бейкера – Кэмпбелла – Хаусдорфа

$$e^X e^Y = e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]}, \quad (3.8)$$

и коммутатор  $[a, a^+] = 1$ , получим для произведения двух операторов сдвига следующее выражение:

$$D[\alpha]D[\beta] = e^{(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)/2} D[\alpha + \beta]. \quad (3.9)$$

Тогда, используя выражение (3.7), получим действие оператора сдвига на произвольное когерентное состояние  $|\alpha\rangle$

$$D[\beta]|\alpha\rangle = D[\beta]D[\alpha]|0\rangle = e^{(\beta\alpha^* - \beta^*\alpha)/2} |\alpha + \beta\rangle. \quad (3.10)$$

Таким образом, действие оператора сдвига на когерентное состояние приводит также к появлению дополнительной фазы. Например, для действительного  $p$

$$D[ip]|\alpha\rangle = e^{ip\text{Im}(\alpha)} |\alpha + ip\rangle. \quad (3.11)$$

Стоит заметить, что базис когерентных состояний является переполненным, при этом

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle\alpha| = 1, \quad (3.12)$$

где интегрирование ведётся по всей комплексной плоскости. Скалярное произведение двух когерентных состояний задаётся выражением

$$\langle\alpha|\beta\rangle = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2\alpha^*\beta)}. \quad (3.13)$$

### **3.2 Операция перепутывания двух ионов при помощи неадиабатического фазового гейта**

Рассмотрим теперь взаимодействие двух ионов с парой мгновенных импульсов. Оператор эволюции будет представлять собой произведение операторов  $e^{-2iz\vec{k}\vec{r}\sigma^z}$  для каждого иона:

$$U_{kick} = e^{-2iz\vec{k}(\vec{r}_1\sigma_1^z + \vec{r}_2\sigma_2^z)}, \quad (3.14)$$

где  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  – операторы координат ионов, а  $\sigma_1^z, \sigma_2^z$  – матрицы Паули, действующие на состояния ионов 1 и 2.

Выражение (3.14) является обобщением на двумерный случай оператора, приведённого в [29]. Дальнейшие выкладки для получения добавочной фазы, приобретаемой ионами, от серии «быстрых толчков» (так можно описать воздействие на состояния ионов оператором (3.14)) так же являются обобщением приведённого в статье доказательства.

В присутствии других ионов и наличии нескольких мод коллективных колебаний координаты данных ионов можно разложить следующим образом:

$$\vec{r}_i = \sum_p^{2L} \vec{b}_i^{(p)} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\nu_p}} (a_p + a_p^\dagger), \quad (3.15)$$

где  $a_p^\dagger, a_p$  – операторы рождения/уничтожения фононов в моде,  $\vec{b}_i^{(p)} = \begin{pmatrix} b_{xi}^{(p)} \\ b_{yi}^{(p)} \end{pmatrix}$  – вклад моды  $p$  в колебание,  $L$  – число ионов и  $2L$  – число мод. Таким образом, подставляя выражение (3.15) в оператор (3.14), получим:

$$U_{kick} = \prod_{p=1}^{2L} e^{-2iz(\vec{b}_1^{(p)}\sigma_1^z + \vec{b}_2^{(p)}\sigma_2^z)\vec{\eta}_p(a_p + a_p^\dagger)}, \quad (3.16)$$

где  $\vec{\eta}_p = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\nu_p}} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix}$  – параметр Лэмба-Дике. Данное выражение можно переписать, используя оператор сдвига  $\widehat{D}_p(\alpha) = \exp[\alpha a_p^\dagger - \alpha^* a_p]$ :

$$U_{kick} = \prod_{p=1}^{2L} \widehat{D}_p(-2iz(\vec{b}_1^{(p)}\sigma_1^z + \vec{b}_2^{(p)}\sigma_2^z)\vec{\eta}_p). \quad (3.17)$$

Процесс (б) представляет собой оператор свободной эволюции – изменение фазы состояния с частотой моды  $U_{p,free} = e^{-iv_p \delta t_k a_p^\dagger a_p}$ , где  $\delta t_k = t_{k+1} - t_k$  – время свободной эволюции между k-ой серией импульсов и k+1-ой серией импульсов. Таким образом, полный оператор для N таких циклов запишется в виде

$$U_{gate} = \prod_{k=1}^N \prod_{p=1}^{2L} \hat{D}_p(-ic_{pk}) e^{-iv_p \delta t_k a_p^\dagger a_p}, \quad (3.18)$$

$$c_{pk} = 2z_k \left( \vec{b}_1^{(p)} \sigma_1^z + \vec{b}_2^{(p)} \sigma_2^z \right) \vec{\eta}_p. \quad (3.19)$$

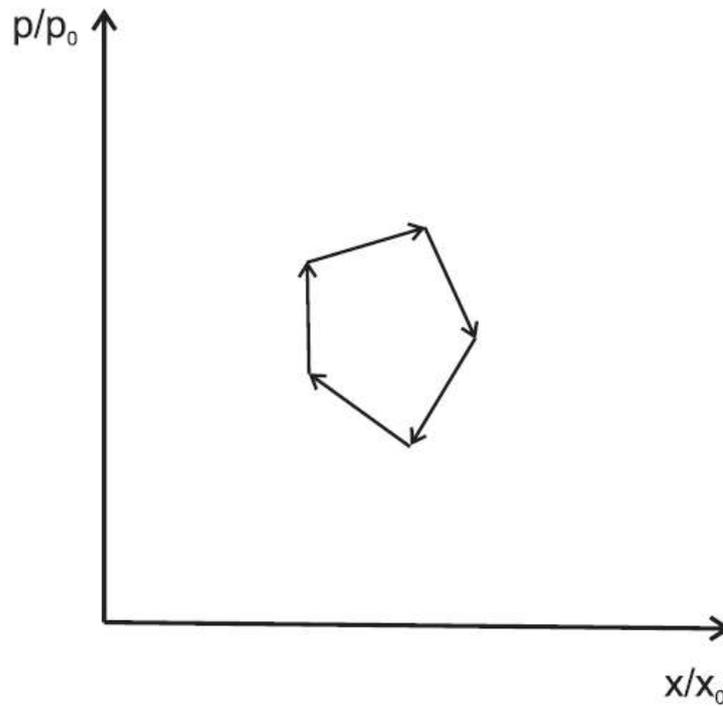


Рис. 8. Интерпретация действия идеального фазового гейта на одну моду колебаний на фазовой плоскости, вращающейся с частотой моды. Вектора отвечают смещениям состояния под действием толчков, а углы между ними – повороты фазы колебания до следующего толчка. Замыкание кривой означает, что состояние моды осталось неизменным с точностью до свободной эволюции.

Рассмотрим отдельную моду  $p$ , и пусть начальное её состояние задавалось когерентным состоянием  $|\alpha\rangle$ , после действия оператора (3.18) это состояние перейдёт в  $e^{i\xi_p} |\tilde{\alpha}\rangle$ , где

$$\xi_p = \sum_{m=2}^N \sum_{k=1}^{m-1} \left[ c_{pm} c_{pk} \sin(v_p(t_m - t_k)) \right] - \text{Re}[\alpha \sum_{k=1}^N c_{pk} e^{-iv_p t_k}], \quad (3.20)$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha e^{-iv_p T_G} - i \sum_{k=1}^N c_{pk} e^{iv_p(t_k - T_G)}. \quad (3.21)$$

Можно заметить, что при выполнении условия

$$C_p = -i \sum_{k=1}^N c_{pk} e^{iv_p t_k} = 0 \quad (3.22)$$

результат таких импульсов приведёт к тому, что когерентное останется таким же, каким оно было бы в отсутствие взаимодействия, то есть  $\alpha e^{-iv_p T_G}$ , с точностью до дополнительного фазового множителя  $e^{i\xi_p}$ . Таким образом, результат такого действия не зависит от начального колебательного состояния. На фазовой плоскости (Рис.8) во вращающейся с частотой моды системе координат условие (3.22) можно изобразить в виде замыкающейся кривой, где стрелками показаны смещения колебательного состояния после каждого толчка иона, а угол поворота соответствует набегавшей фазе колебания за время между толчками. Тот факт, что кривая замыкается, означает, что когерентное состояние претерпевает такое же изменение, как и в отсутствие взаимодействия.

Учитывая все моды, подставляя в (3.20) выражение (3.19) и опуская члены, которые не дают зависимости от внутреннего состояния, получим итоговое выражение для фазы

$$\Phi = 8 \sum_{p=1}^{2L} (\vec{\eta}_p \vec{b}_1^{(p)}) (\vec{\eta}_p \vec{b}_2^{(p)}) \sigma_1^z \sigma_2^z \sum_{m=2}^N \sum_{k=1}^{m-1} z_m z_k \sin(v_p(t_m - t_k)). \quad (3.23)$$

Из-за присутствия операторов  $\sigma_1^z, \sigma_2^z$  приобретённые фазы для состояний  $|00\rangle, |11\rangle$  и  $|01\rangle, |10\rangle$  отличаются знаком, поэтому если изначально имелось, например, состояние  $\frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{1}{2}|11\rangle$ , то после применения такой операции получим состояние  $\frac{1}{2}e^{i\Phi}|00\rangle + \frac{1}{2}e^{-i\Phi}|01\rangle + \frac{1}{2}e^{-i\Phi}|10\rangle + \frac{1}{2}e^{i\Phi}|11\rangle$ . При  $\Phi = \frac{\pi}{4}$  состояние будет иметь вид  $\frac{1}{2}i|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{1}{2}i|11\rangle$  (глобальная фаза опущена).

Покажем, что состояние  $\frac{1}{2}ie^{i\gamma}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{1}{2}ie^{-i\gamma}|11\rangle$  является максимально перепутанным. Для этого рассмотрим следующий базис

$$|e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |00\rangle), \quad (3.24)$$

$$|e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}i(|11\rangle - |00\rangle), \quad (3.25)$$

$$|e_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}i(|10\rangle + |01\rangle), \quad (3.26)$$

$$|e_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |01\rangle). \quad (3.27)$$

В данном базисе начальное и конечное состояния будут иметь вид:

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1\rangle - i|e_2\rangle), \quad (3.28)$$

$$|\psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\cos(\gamma)|e_1\rangle - i\sin(\gamma)|e_2\rangle - i|e_3\rangle). \quad (3.29)$$

Ранее было показано [30], как вычислить степень перепутанности состояния с помощью коэффициентов разложения по базису  $|e_i\rangle$ , который является базисом бэлловских функций с точностью до фазы. Для состояния  $|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |e_i\rangle$  определим функцию

$$C(\psi) = |\sum_i \alpha_i^2|. \quad (3.30)$$

Данную функцию также называют согласованностью состояния  $|\psi\rangle$ . Используя выражение (3.30) для начального и конечного состояния, получим

$$C(\psi_i) = 0, \quad (3.31)$$

$$C(\psi_f) = -1. \quad (3.32)$$

Теперь дополнительно рассмотрим функции

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - x^2}), \quad (3.33)$$

$$H(x) = -[x \log_2(x) + (1 - x) \log_2(1 - x)], \quad (3.34)$$

, где вторая функция называется бинарной функцией энтропии. Перепутанность системы, состоящей из двух подсистем, – это, по определению, энтропия фон Неймана от уменьшенной матрицы плотности. В терминах введённых выше функций перепутанность состояния  $|\psi\rangle$  даётся в удобном виде

$$E(\psi) = H(f(C(\psi))), \quad (3.35)$$

при этом значение  $E = 0$  означает, что состояние  $|\psi\rangle$  не является перепутанным, то есть может быть представлено в виде произведения однокубитных состояний, и значение  $E = 1$  означает максимальную перепутанность. Применив данное выражение к  $|\psi_i\rangle$  и  $|\psi_f\rangle$ , получим  $E(\psi_i) = 0$  и  $E(\psi_f) = 1$ .

Это показывает, что данный контролируемый фазовый гейт позволяет получить максимально перепутанное состояние.

Таким образом, задача состоит в нахождении последовательности  $z_k$  и  $t_k$  (очередности и времен прихода пар импульсов, соответственно), дающих условие (3.22) для каждой моды и условие  $\Phi = \frac{\pi}{4}$ . Точно соблюсти данные условия не удаётся, поэтому вводится понятие «точность операции» (fidelity), показывающее насколько близко действие гейта к идеальному оператору. Для начального внутреннего состояния  $|\psi_0\rangle$  и колебательного состояния, заданного матрицей плотности  $\rho_m$ , точность [31] вводится как

$$F = Tr_m[\langle\psi_0|U_{id}^+U_{re}|\psi_0\rangle\langle\psi_0|\otimes\rho_m U_{re}^+U_{id}|\psi_0\rangle] = Tr_m[A^+A\rho_m], \quad (3.36)$$

где

$$A = \langle \psi_0 | U_{id}^+ U_{re} | \psi_0 \rangle, \quad (3.37)$$

$$U_{id} = \begin{pmatrix} e^{i\pi/4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\pi/4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

$$U_{re} = \begin{pmatrix} e^{i\phi_{00}} \widehat{D}_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_{01}} \widehat{D}_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_{01}} \widehat{D}_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\phi_{11}} \widehat{D}_{11} \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

- операторы идеального и реального гейта в базисе  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ .

Здесь  $\phi_{00}, \phi_{01}, \phi_{10}, \phi_{11}$  и  $\widehat{D}_{00}, \widehat{D}_{01}, \widehat{D}_{10}, \widehat{D}_{11}$  – реальные фазы и операторы смещения колебательных мод, зависящие от внутренних состояний ионов.

После усреднения по матрице плотности в (3.36) для состояния  $\frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{1}{2}|11\rangle$  точность операции будет иметь следующий вид

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{16} \left[ 4 + 2 \exp \left( \sum_{p=1}^{2L} -4 \left( (\vec{b}_1^{(p)} - \vec{b}_2^{(p)}) \vec{c}_p \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \bar{n}_p \right) \right) \right. \\ &+ 2 \exp \left( \sum_{p=1}^{2L} -4 \left( (\vec{b}_1^{(p)} + \vec{b}_2^{(p)}) \vec{c}_p \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \bar{n}_p \right) \right) \\ &+ 4 \left( \exp \left( \sum_{p=1}^{2L} -4 \left( \vec{b}_1^{(p)} \vec{c}_p \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \bar{n}_p \right) \right) \right. \\ &+ \exp \left( \sum_{p=1}^{2L} -4 \left( \vec{b}_2^{(p)} \vec{c}_p \right)^2 \left( \frac{1}{2} \right. \right. \\ &\left. \left. + \bar{n}_p \right) \right) \left. \right) \sin(2\phi_{00}) \left. \right], \quad (3.40) \end{aligned}$$

где  $\bar{n}_p$  - среднее число фононов в моде  $p$ ,  $\vec{c}_p = 2\vec{\eta}_p \sum_{k=1}^N z_k e^{iv_p t_k}$

Часто для того, чтобы не брать в рассмотрение конкретное состояние, используют усреднённую по начальным состояниям точность. При этом общий вид формулы останется неизменным.

Подбор параметров стратегии для получения хороших соотношений точности и времени операции проводится при помощи известных методов, таких, как, например, схема FRAG (fast robust antisymmetric gate) [32], в которой последовательность очередностей и моментов прихода импульсов заданы как  $z_k = \{-n, 2n, -2n, 2n, -2n, n\} (n \in N)$ ,  $t_k = \{-\tau_1, \tau_1 - \tau_2, -\tau_3, \tau_3, \tau_2, \tau_1\}$ . Суть подобных методов – обеспечение симметрии, позволяющей привести выражение (3.22) с некоторой точностью к выражению, не зависящему от моды колебаний [31].

### 3.3 Реализация операции перепутывания на ионах иттербия

Перейдём теперь к конкретной реализации неадиабатической операции перепутывания. Заметим, что кубитный переход  $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$  между сверхтонкими компонентами основного состояния, возбуждение которого предполагается в этой главе для осуществления быстрых актов поглощения и отдачи импульса, не является дипольным и недоступен для прямого возбуждения оптическим полем. Так, для иона  $^{171}\text{Yb}^+$  таким переходом является сверхтонкое расщепление уровня  $^2S_{1/2}: ^2S_{1/2}|F=1; m_F=0\rangle \leftrightarrow ^2S_{1/2}|F=0; m_F=0\rangle$ . Частота этого перехода  $\omega_0 \approx 12.6$  ГГц. Для его возбуждения удобно использовать стимулированный рамановский переход, т.е. связывать уровни посредством двух оптических полей, имеющих разность частот, равную резонансной частоте, через виртуальный уровень, отстроенный на большую величину порядка десятков терагерц от всех близлежащих уровней (рис.9).

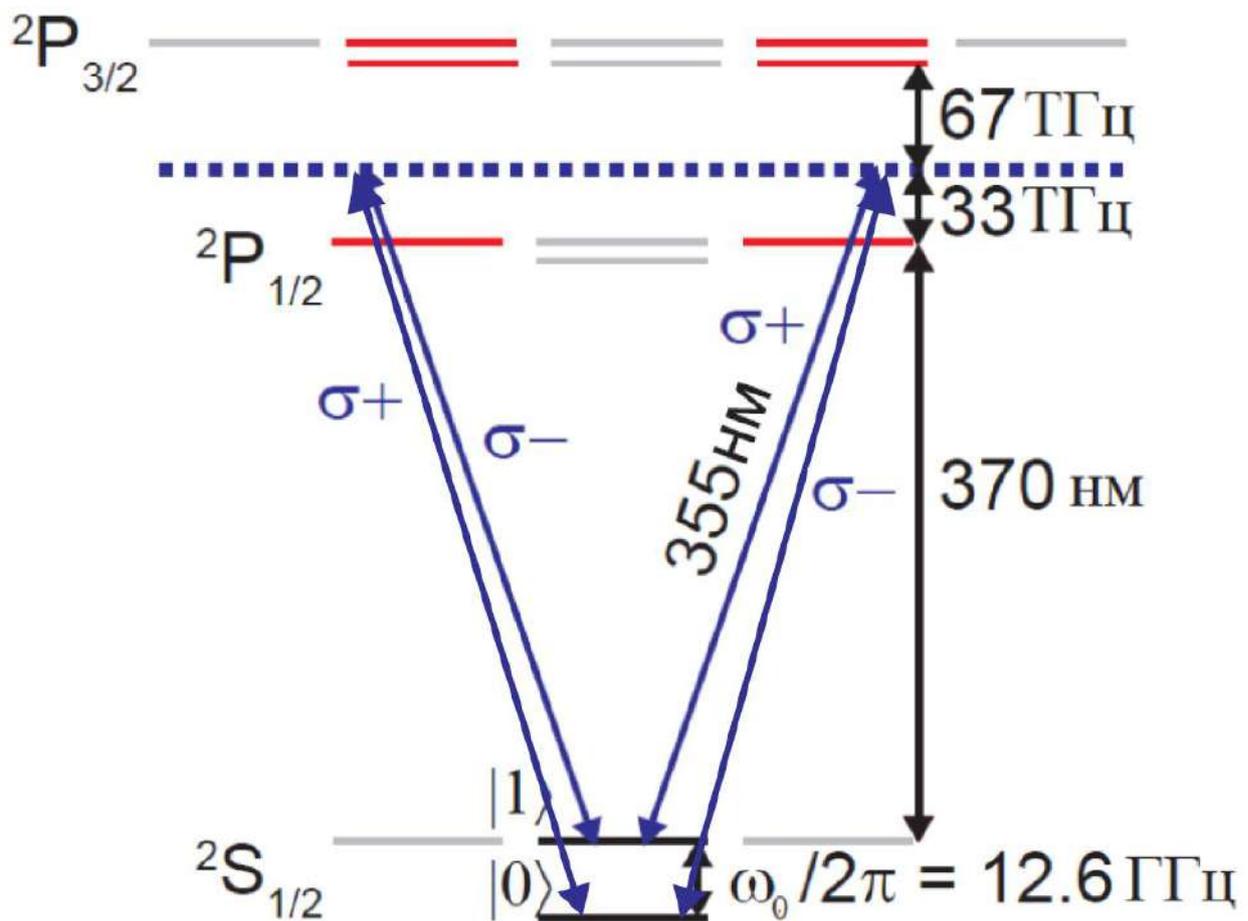


Рис. 9. Частичная схема уровней  $^{171}\text{Yb}^+$ . Возбуждение перехода между компонентами сверхтонкой структуры возможно с помощью двух оптических полей, связывающих уровни через виртуальный уровень, отмеченный пунктирной линией.

Для  $^{171}\text{Yb}^+$  возбуждение перехода может быть осуществлено с помощью одного импульсного лазера с длиной волны 355 нм [33]. Спектр такого импульсного лазера представляет собой гребёнку частот, разнесённых на частоту повторений  $f_{rep}$ . При этом, если направить на ион два распространяющихся навстречу друг другу пучка, то с помощью использования двух акусто-оптических модуляторов (АОМ) можно сдвинуть один импульс по частоте относительно другого так, что выполнится условие резонанса

$$\omega_0 = n\omega_{rep} \pm \omega_{aom}, \quad (3.41)$$

где  $\omega_{aom} = \omega_{aom1} + \omega_{aom2}$  – смещение по частоте одного пучка относительно другого, определяемое добавками частот от каждого из аомов, а  $n$  – какое-либо целое число.

Тогда будет существовать компонента спектра одного импульса, отличающаяся от некоторой компоненты спектра другого импульса по частоте на  $\omega_0$  (Рис. 10). Интерференция пучков будет вызывать возбуждение перехода.

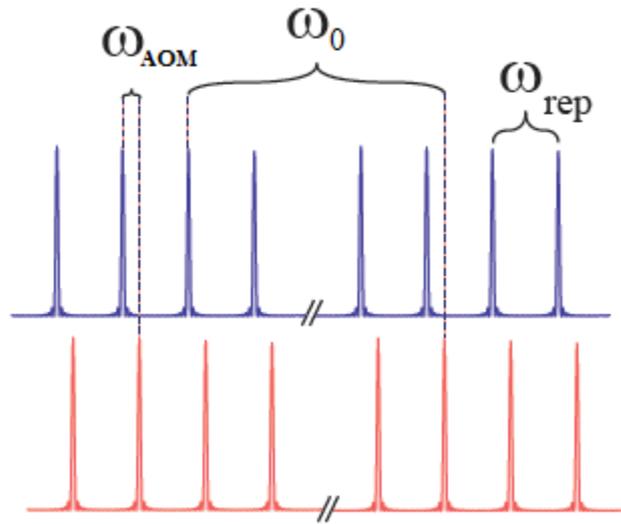


Рис. 10. Спектр двух пучков, приходящих на ион. Две компоненты спектров, разнесённые на частоту перехода, интерферируя, приводят к его возбуждению.

Эффективный (для эффективной двухуровневой системы) гамильтониан взаимодействия иона с такой парой пучков в дипольном приближении и приближении вращающейся волны запишется в виде [33]:

$$H_{eff}(t) = -\theta \delta(t - t_0) \cos[\vec{\Delta k} \vec{r} + \Delta \phi(t)] \hat{\sigma}_x, \quad (3.42)$$

где  $\theta$  – площадь импульсов,  $\vec{\Delta k}, \Delta \phi(t) = \omega_{aom} t + \phi_0$  – разность волновых векторов и разность фаз двух пучков, причём импульсы предполагаются мгновенными, приходящими в момент времени  $t_0$ .

В случае присутствия многих ионов, как и в (3.15) выражение (3.42) преобразуется в

$$H_{eff}(t) = -\theta\delta(t - t_0) \cos \left[ \sum_{p=1}^{2L} \vec{\eta}_p \vec{b}_1^{(p)} (a + a^\dagger) + \Delta\phi(t) \right] \hat{\sigma}_x. \quad (3.43)$$

Для получения оператора эволюции можно напрямую проинтегрировать данный гамильтониан, т.к. он коммутирует сам с собой в разные моменты времени:

$$U_{t_0} = \exp(-i \int H_{eff}(t) dt) =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\theta) e^{in\Delta\phi(t_0)} \hat{\sigma}_{x1}^n \prod_{p=1}^{2L} D[in\vec{b}_1^{(p)} \vec{\eta}_p], \quad (3.44)$$

где  $J_n(\theta)$  - функция Бесселя порядка  $n$ .

Таким образом, из выражения (3.44) видно, что после действия данного оператора эволюции волновая функция иона дифрагирует (Рис. 11): происходит процесс поглощения фотонов из одного пучка и излучения в другой пучок, процесс повторяется  $n$  раз с амплитудой вероятности  $J_n(\theta)$ , при этом состояние иона меняется при нечётных  $n$  из-за присутствия оператора  $\hat{\sigma}_{x1}^n$ . Это поведение аналогично рассеянию атомной волновой функции на стоячей волне, известному как рассеяние Капицы-Дирака [34].

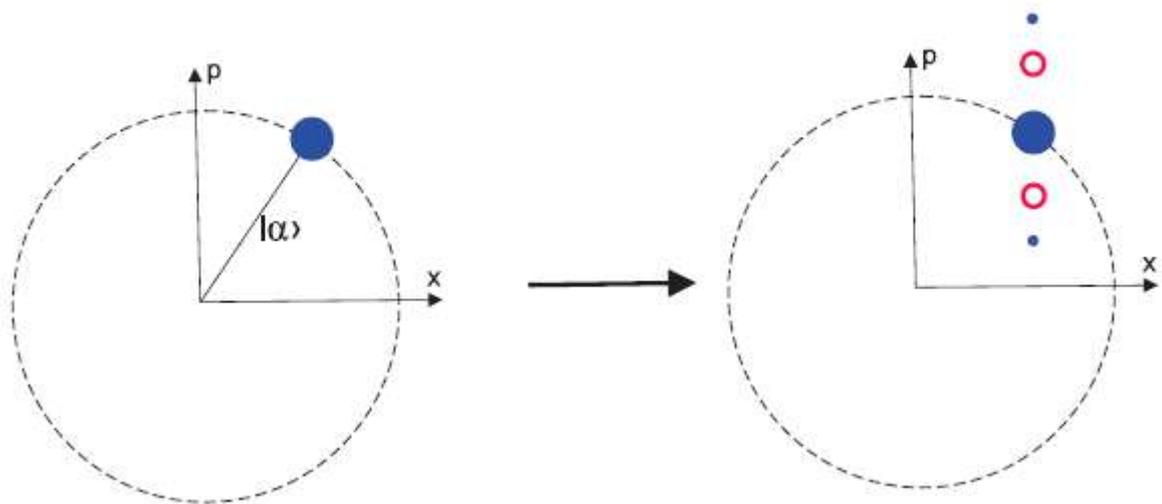


Рис. 11. Дифракция состояния иона после воздействия быстрых импульсов

Однако для реализации быстрого гейта, описанного выше, необходима эволюция состояния иона в соответствии с оператором (3.14). Ранее данные симуляции и экспериментальные данные [33,35] показали, что разбив один лазерный импульс на несколько более мелких, выставляя задержки между приходами импульсов, можно получить оператор (для одного иона и одной моды колебаний)

$$ie^{i\phi_0}D[i\eta]\hat{\sigma}_+ + ie^{-i\phi_0}D[-i\eta]\hat{\sigma}_-, \quad (3.45)$$

с высокой достоверностью, что с точностью до фазы является «половиной» действия оператора (3.14). То есть ион приобретает импульс, однако меняет внутреннее состояние. Чтобы вернуть ион в начальное внутреннее состояние, нужно приложить такую же последовательность импульсов, но с изменением направленности пучков, т.е. теперь импульс, прошедший, например, через первый АОМ, будет приходить на ион с противоположной стороны. Такая инверсия соответствует замене  $\Delta\phi \rightarrow -\Delta\phi$ , и итоговый оператор примет вид:

$$(ie^{i\phi_0}D[i\eta]\hat{\sigma}_+ + ie^{-i\phi_0}D[-i\eta]\hat{\sigma}_-)(ie^{-i\phi_0}D[-i\eta]\hat{\sigma}_+ + ie^{i\phi_0}D[i\eta]\hat{\sigma}_-) = -(e^{2i\phi_0}D[2i\eta]\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- + e^{-2i\phi_0}D[-2i\eta]\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+). \quad (3.46)$$

Достоверности операций, вычисленные с помощью формулы (3.40) с оптимизированной стратегией оказываются высоки, вплоть до ошибок  $10^{-9}$  [36] для большого числа импульсов, однако при её выводе каждый отдельный акт, описываемый оператором (3.14), предполагается безошибочным. Для получения более реалистичной оценки важно провести полную симуляцию быстрого гейта с учётом ошибок, возникающих на каждом одиночном импульсе. Для будущих экспериментов по реализации квантовой логики в лаборатории ФИАН в рамках данной работы была проведена численная симуляция эксперимента по быстрому перепутыванию пары ионов в массиве из 9 ионов  $^{171}\text{Yb}^+$ .

## 4. Численное моделирование эксперимента по перепутыванию ионов иттербия в планарной ловушке

### 4.1 Расчёт параметров планарной ловушки

Для ранее описанного в данной работе типа планарной ловушки был построен график квадратного корня второй производной псевдопотенциала в зависимости от координаты вдоль одной из поперечных осей ( $x$  или  $y$ ) с целью проверки его параболичности в областях удержания и применимости гармонического приближения, а также вычисления секулярной частоты. Были использованы следующие параметры ловушки (Рис.6,12):  $b = 40$  мкм – полный радиус кольца, от центра до края поверхности с радиочастотным потенциалом,  $d = 30$  мкм – ширина кольца с приложенным радиочастотным потенциалом,  $150$  мкм – расстояние между центрами захватов. На Рис. 13 показан график зависимости  $\omega_T(x) = \sqrt{e \frac{d^2 \Psi_T(x)}{m dx^2}}$ . Частота ловушки принята равной  $2\pi \times 20$  МГц, а амплитуда напряжения  $1$  В. Видно, что в областях захвата (до  $3$  мкм) секулярная частота остаётся постоянной с точностью около  $3\%$ . Секулярная частота пропорциональна приложенному напряжению и для дальнейших расчётов операции перепутывания была использована секулярная частота  $\omega_T = 2.1 \times 10^5$ , что достигается при амплитуде напряжения около  $0.55$  В.

Далее с помощью уравнений (2.1) – (2.2) численно найдены собственные частоты нормальных коллективных колебаний и собственные вектора. Для перепутывания были выбраны два крайних иона (рис.14а).

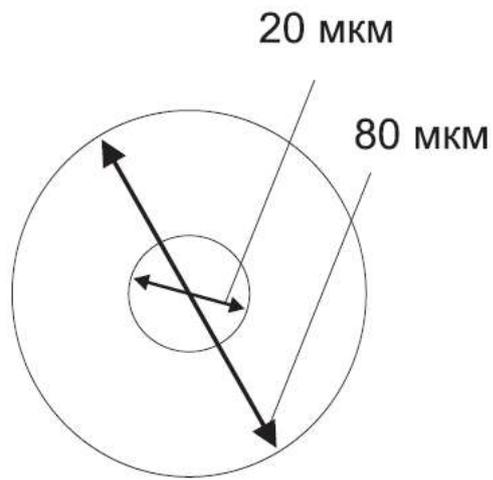


Рис.12. Выбранные параметры ловушки

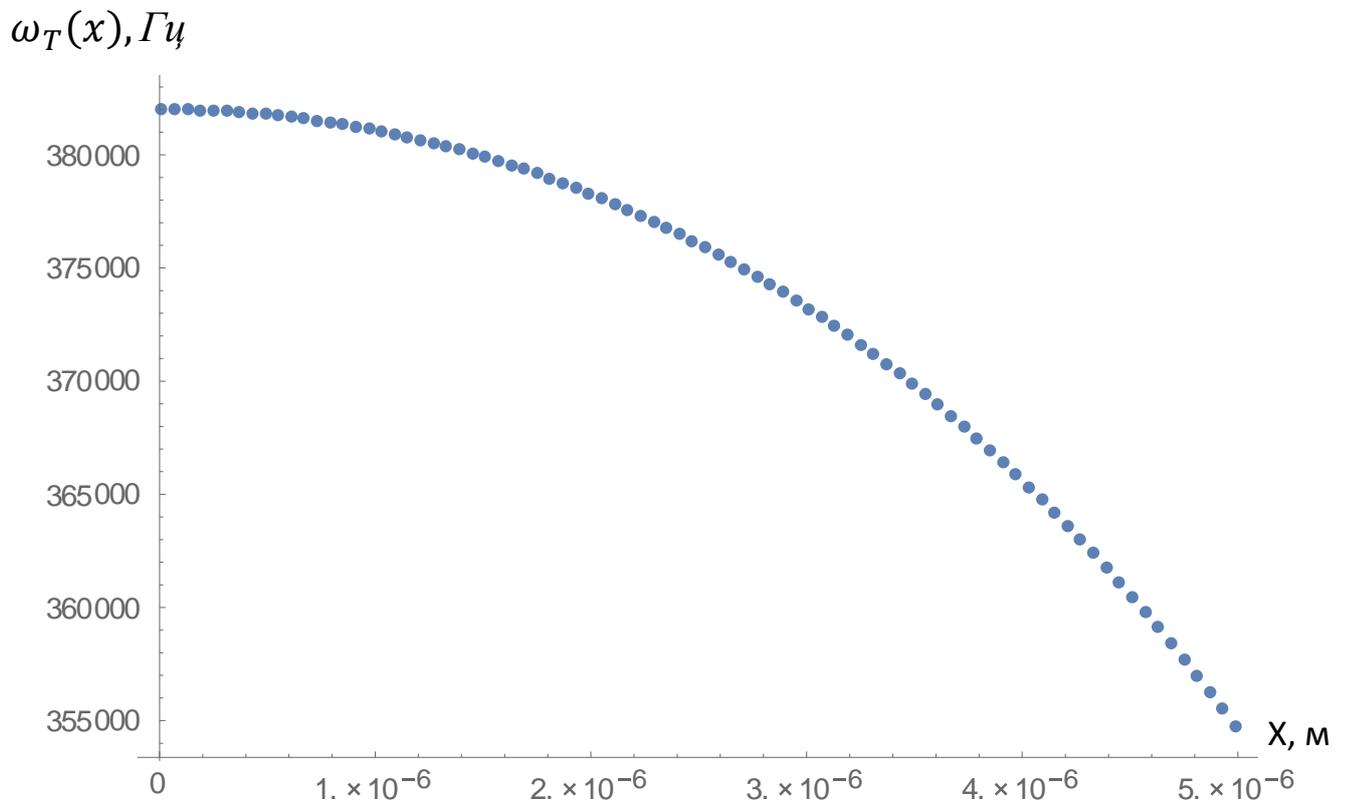


Рис. 13. Зависимость секулярной частоты от расстояния до центра ловушки

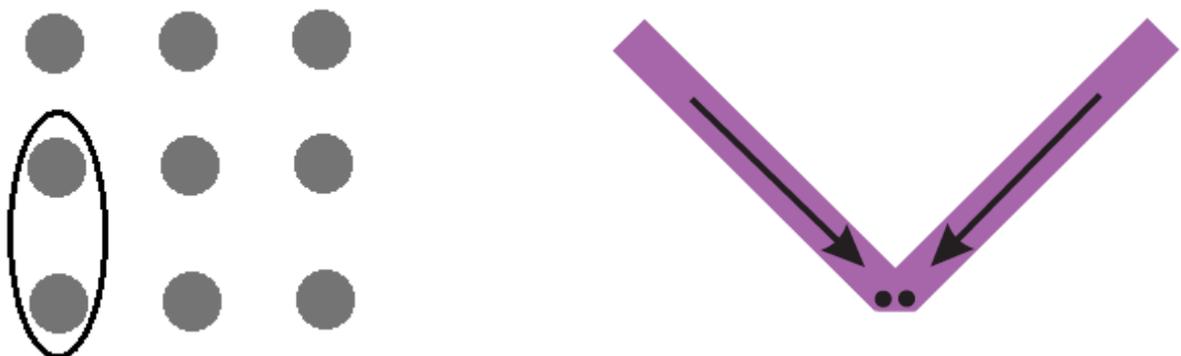


Рис. 14.а) Выбор ионов для перепутывания. б) Пример адресации двух ионов для передачи импульса вдоль плоскости ловушек.

## 4.2 Оценка достоверности операции перепутывания двух ионов иттербия в планарной ловушке

Чтобы передавать импульс вдоль направления, лежащего в плоскости колебаний, и возбуждать только поперечные моды, используются два пучка (рис.14б), распространяющиеся под углом  $45^\circ$  к плоскости колебаний и, соответственно,  $90^\circ$  между пучками, так что  $\Delta k = \frac{2\pi i}{\lambda} \cdot \sqrt{2}$ , где  $\lambda = 355$  нм.

Стоит отметить, что фаза (3.23) принимает наибольшее значение при направлении  $\Delta \vec{k}$ , близком к направлению прямой, соединяющей данные ионы, т.к. в этом случае можно значительно изменять расстояние и, следовательно, взаимодействие между ними, что приводит к набегу фазы. Поэтому параметр Лэмба – Дике для моды  $p$  принимается равным  $\eta_p = \frac{2\pi i}{\lambda} \cdot$

$$\sqrt{2} \binom{0}{1} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_p}}.$$

Ранее в Главе 3 обсуждалось, что необходим подбор параметров  $z_k, t_k$ , отвечающих, соответственно, количеству импульсов в серии и моментам прихода, приводящих к поглощению или отдаче импульса в зависимости от внутреннего состояния. Для схемы FRAG ( $z_k = \{-n, 2n, -2n, 2n, -2n, n\} (n \in N)$ ,  $t_k = \{-\tau_1, -\tau_2, -\tau_3, \tau_3, \tau_2, \tau_1\}$ ) при  $n = 1$  был найден набор  $(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = (22.4 \text{ мкс}, 13.4 \text{ мкс}, 4.4 \text{ мкс})$  с помощью перебора с шагом  $0.1 \text{ мкс}$ , дающий по формуле (3.40) достоверность операции перепутывания  $\frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{1}{2}|11\rangle \rightarrow \frac{1}{2}i|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{1}{2}i|11\rangle$  95.38 %. Далее данные параметры использовались для полной симуляции эксперимента по перепутыванию ионов с учётом конечного периода повторения лазерных импульсов и возникающих ошибок получения оператора (3.14). Для симуляции был написан код с помощью Wolfram Mathematica. За основу был взят код для симуляции эволюции состояния [33] после приложения 8 импульсов с площадью  $\theta = \frac{\pi}{8}$ , позволяющий оценить точность операции для

оператора (3.45) около 99.8% для одного иона и одной моды колебаний. То есть каждый импульс, который должен приводить к толчку в зависимости от состояния, приближается с некоторой точностью 8-ю реальными лазерными импульсами. При взаимодействии пучков с двумя ионами и наличии 18 мод колебаний эволюция состояния ионов с учётом  $N$  порядков дифракции запишется в виде оператора

$$\left( \sum_{n_2=-N}^N \sum_{n_1=-N}^N i^{n_1+n_2} J_{n_1}(\theta) J_{n_2}(\theta) e^{i(n_1+n_2)\Delta\phi(t_0)} \hat{\sigma}_{x1}^{n_1} \sigma_{x2}^{n_2} \prod_{p=1}^{18} D[in_1 \vec{b}_1^{(p)} \vec{\eta}_p + in_2 \vec{b}_2^{(p)} \vec{\eta}_p] \right) e^{-i\omega_{hf}T(\hat{\sigma}_{z1} + \hat{\sigma}_{z2})/2} \prod_{p=1}^{18} e^{-i\omega_p T a^+ a}, \quad (4.1)$$

что является произведением двух операторов (3.44) для двух ионов, а также операторов свободной эволюции когерентных состояний мод и эволюцией внутренних состояний ионов, где  $T$  – время до прихода следующей пары импульсов. Состояние ионов задаётся как набор чисел  $\{\{c_1, s_1^1, s_2^1, \alpha_1^1, \dots, \alpha_{18}^1\}, \dots, \{c_n, s_1^n, s_2^n, \alpha_1^n, \dots, \alpha_{18}^n\}\}$ , задающий суперпозицию  $c_1 |s_1^1 s_2^1\rangle |\alpha_1^1, \dots, \alpha_{18}^1\rangle + \dots + c_n |s_1^n s_2^n\rangle |\alpha_1^n, \dots, \alpha_{18}^n\rangle$ , где  $s_1^k, s_2^k$  – состояние спина ионов,  $\alpha_1^1, \dots, \alpha_{18}^1$  – когерентные состояния. После применения оператора (4.1) каждое состояние из суперпозиции дифрагирует на  $(2N + 1)^2$  новых состояний. Достоверность операции после серии таких дифракций может быть оценена как  $|\langle U\psi_0 | \psi_{id} \rangle|^2$ , где  $\psi_0$  – начальное состояние,  $U$  – оператор полной эволюции, состоящий из серий (4.1),  $\psi_{id}$  – искомое состояние.

Были использованы следующие моменты времени прихода 8 импульсов (рис. 15) :  $\{0, t_1, t_2, t_1 + t_2, t_3, t_3 + t_1, t_3 + t_2, t_3 + t_2 + t_1\}$ , где  $t_1 = \frac{6.5}{\nu_{hf} + \nu_{aom}}$ ,  $t_2 = \frac{8}{\nu_{hf} + \nu_{aom}}$ ,  $t_3 = \frac{17}{\nu_{hf} + \nu_{aom}}$ . Выбор моментов прихода в такой форме можно понять, если рассмотреть вид оператора (3.44) в приближении большого числа пар импульсов и в представлении взаимодействия  $V_{t_0} = U_{FE}^+ U_{t_0} U_{FE}$ , где  $U_{FE}$  – оператор свободной эволюции между импульсами:

$$V_{t_0} = 1 + \frac{i\pi}{2N} \left\{ e^{i\phi_0} D[i\eta] \left( e^{2\pi i(v_{hf} + v_{aom})} \hat{\sigma}_+ + e^{2\pi i(v_{hf} - v_{aom})} \hat{\sigma}_- \right) + e^{-i\phi_0} D[-i\eta] \left( e^{-2\pi i(v_{hf} + v_{aom})} \hat{\sigma}_- + e^{-2\pi i(v_{hf} - v_{aom})} \hat{\sigma}_+ \right) \right\}. \quad (4.2)$$

Отсюда видно, что выбор моментов прихода импульсов в форме  $\frac{n}{v_{hf} + v_{aom}}$  обеспечивает рост слагаемых вида  $D[i\eta]\hat{\sigma}_+$  и  $D[-i\eta]\hat{\sigma}_-$  и подавление слагаемых вида  $D[i\eta]\hat{\sigma}_-$  и  $D[-i\eta]\hat{\sigma}_+$  с ростом числа импульсов, причём в пределе произведение операторов перейдёт в оператор (3.45). Выбор полуцелого значения  $n$  для  $t_1$  обусловлен наличием дополнительного фазового сдвига на  $\pi$  при отражении в одной из линий задержки.

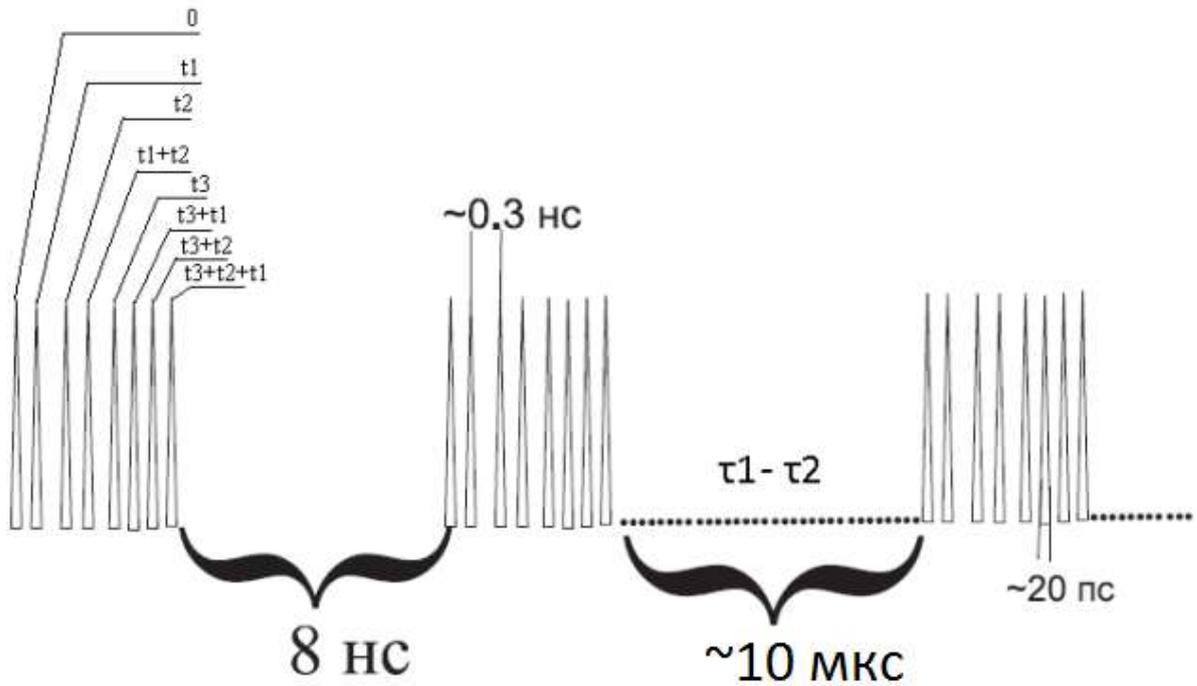


Рис. 15. Задержки между импульсами, приходящими на ионы

Следующие 8 пар импульсов приходят через время  $T_{rep}$ , при этом для них разность фаз  $\Delta\phi$  меняет знак. В последовательности  $z_k = \{-1, 2, -2, 2, -2, 1\}$  знак соответствует знаку  $\Delta\phi$  в первой последовательности импульсов, число соответствует количеству последовательностей по 16 пар импульсов, т.е. 2 означает 4 последовательности по 8 пар импульсов с временем  $T_{rep}$  между ними.

Значения  $\nu_{aom} = 489.595$  МГц,  $f_{rep} = 118.31$  МГц были выбраны из условия резонанса (3.41) со знаком «-». При этом такая частота повторений лежит в диапазоне доступных частот повторений лазера Paladin, который ранее использовался для реализации квантовой логики на ионах иттербия, и данная пара частот даёт максимальную достоверность операции после 16 пар импульсов среди проверенных пар частот, дающих резонанс. Так, достоверность операции (3.14) равна 99.53 %. Найденная ранее последовательность моментов времени  $t_k = \{-\tau_1, -\tau_2, -\tau_3, \tau_3, \tau_2, \tau_1\}$  была преобразована так, чтобы в каждом  $t_k$  укладывалось целое число периодов повторений лазерных импульсов:  $\{0, 9.00177512, 18.0035502, 26.8024684, 35.8042436, 44.8060187\}$ . Эти значения использовались как добавки к моментам прихода каждого импульса для каждой новой серии так, что разность моментов прихода между последним импульсом в серии  $Z_k$  и первым импульсом в серии  $Z_{k+1}$  равна  $t_{k+1} - t_k$ , а внутри одной серии задержка между подсериями из 8 импульсов  $\frac{1}{f_{rep}} = 0.008452371$ . Так как время действия 8 импульсов около 3 нс, а частота самой быстрой моды  $\approx 2.2 \times 10^5$  Гц, эволюция когерентного состояния мод учитывалась только между сериями.

Итоговая достоверность операции перепутывания  $\frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{1}{2}|11\rangle \rightarrow \frac{1}{2}ie^{i\gamma}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{1}{2}ie^{-i\gamma}|11\rangle$  получается равной 91.45 %. Здесь  $\gamma$  – остаточная фаза, связанная с присутствием акусто-оптических модуляторов, которая для данных параметров была подобрана для максимизации достоверности и равна 2.1. Время операции составляет около 45 мкс, тогда как период колебаний для самой быстрой моды составляет 29 мкс. Начальное когерентное состояние каждой моды  $|\alpha_p\rangle$  для простоты принято равным  $|0\rangle$ , т.е. ионы охлаждены до основного колебательного состояния, однако стоит заметить, что данный тип гейта может потенциально давать высокую достоверность даже после

доплеровского охлаждения, т.е. когда  $\bar{n}_p$  порядка нескольких десятков. Время симуляции составляет около 5 часов (для одного значения  $\gamma$ ) при учёте  $N = 4$  порядков дифракции. В расчёт принимались только состояния с коэффициентом  $c_k$  больше  $10^{-4}$ , при этом когерентные состояния моды колебаний  $|\alpha\rangle$  и  $|\alpha_1\rangle$  полагались равными друг другу, если  $IntegerPart[Im(\alpha) \cdot 10000] = IntegerPart[Im(\alpha_1) \cdot 10000]$  и  $IntegerPart[Re(\alpha) \cdot 10000] = IntegerPart[Re(\alpha_1) \cdot 10000]$ . Так же можно оценить влияние флуктуаций интенсивности на достоверность операции, внося ошибку в площади приходящих импульсов. Так как частота Раби  $\Omega \sim \sqrt{I}$ , то  $\frac{\Delta I}{I} = \frac{2\Delta\Omega}{\Omega}$ . Падение достоверности  $F$  с ростом отклонения площади каждого импульса от  $\pi/8$  показано на Рис. 16 для площадей  $\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8.1}, \frac{\pi}{8.2}, \frac{\pi}{8.3}, \frac{\pi}{8.4}$ , что соответствует ошибке интенсивности соответственно 0, 2.5%, 5%, 7.5%, 10%.

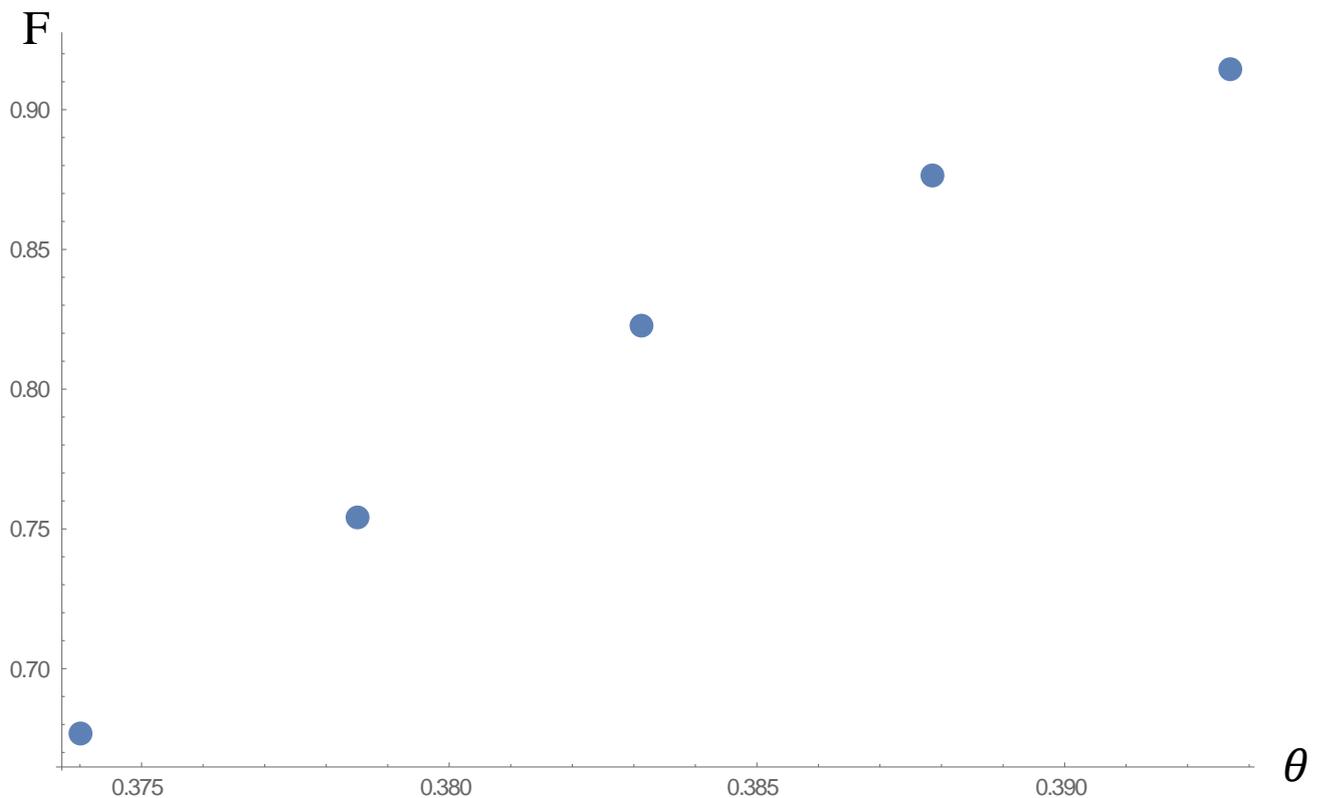


Рис. 16. Зависимость достоверности операции перепутывания от площади импульсов

## **Заключение**

Таким образом, в данной работе была рассмотрена проблема масштабирования квантовых вычислений на ионах иттербия и предложен один из способов её разрешения – использования нескольких центров захвата ионов, в частности, массива ловушек Пауля. Так же произведено численное моделирование эксперимента по перепутыванию пары ионов иттербия в такой конфигурации с помощью использования быстрого фазового гейта как одной из масштабируемых квантовых операций. Был предложен новый метод оценки достоверности такой операции с учётом ошибок промежуточных шагов. Такие оценки необходимы перед проведением эксперимента, так как они дают представление о максимально возможных значениях достоверности. Дальнейшими планами является проведение экспериментов по реализации квантовой логики на ионах иттербия, в частности, расположенных в планарной ловушке.

## **Список литературы**

- [1] Einstein A., Podolsky B., Rosen N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? //Physical review. – 1935. – Т. 47. – №. 10. – С. 777.
- [2] Nielsen M. A., Chuang I. L. Quantum computation and quantum information //Phys. Today. – 2001. – Т. 54. – С. 60-2.
- [3] Nielsen M. A., Chuang I. Quantum computation and quantum information. – 2010. 191 с.
- [4] Shor P. W. Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring //Foundations of Computer Science, 1994 Proceedings., 35th Annual Symposium on. – Ieee, 1994. – С. 124-134.

- [5] Grover L. K. A fast quantum mechanical algorithm for database search //Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing. – 1996. – C. 212-219.
- [6] Blatt R., Wineland D. Entangled states of trapped atomic ions //Nature. – 2008. – T. 453. – №. 7198. – C. 1008-1015.
- [7] Häffner H., Roos C. F., Blatt R. Quantum computing with trapped ions //Physics reports. – 2008. – T. 469. – №. 4. – C. 155-203.
- [8] Monroe C., Kim J. Scaling the ion trap quantum processor //Science. – 2013. – T. 339. – №. 6124. – C. 1164-1169.
- [9] Jessen P. S. et al. Quantum information processing with trapped neutral atoms //Quantum Information Processing. – 2004. – T. 3. – №. 1-5. – C. 91-103.
- [10] Anderlini M. et al. Controlled exchange interaction between pairs of neutral atoms in an optical lattice //Nature. – 2007. – T. 448. – №. 7152. – C. 452-456.
- [11] Matthews J. C. F. et al. Manipulation of multiphoton entanglement in waveguide quantum circuits //Nature Photonics. – 2009. – T. 3. – №. 6. – C. 346.
- [12] Clarke J., Wilhelm F. K. Superconducting quantum bits //Nature. – 2008. – T. 453. – №. 7198. – C. 1031-1042.
- [13] Devoret M. H., Schoelkopf R. J. Superconducting circuits for quantum information: an outlook //Science. – 2013. – T. 339. – №. 6124. – C. 1169-1174.
- [14] Press D. et al. Complete quantum control of a single quantum dot spin using ultrafast optical pulses //Nature. – 2008. – T. 456. – №. 7219. – C. 218-221.
- [15] Loss D., DiVincenzo D. P. Quantum computation with quantum dots //Physical Review A. – 1998. – T. 57. – №. 1. – C. 120.
- [16] Debnath S. et al. Demonstration of a small programmable quantum computer with atomic qubits //Nature. – 2016. – T. 536. – №. 7614. – C. 63.
- [17] IBM Quantum Experience. <http://research.ibm.com/ibm-q/>

- [18] Langer C. et al. Long-lived qubit memory using atomic ions //Physical review letters. – 2005. – Т. 95. – №. 6. – С. 060502.
- [19] Риле Ф. Стандарты частоты. Принципы и приложения. – Litres, 2018.
- [20] Leibfried D. et al. Quantum dynamics of single trapped ions //Reviews of Modern Physics. – 2003. – Т. 75. – №. 1. – С. 281.
- [21] Abramowitz M. Stegun, I. A., 1972 //Handbook of mathematical functions. – 1967. – С. 771-802.
- [22] James D. F. V. Quantum dynamics of cold trapped ions with application to quantum computation //Quantum Computation and Quantum Information Theory: Reprint Volume with Introductory Notes for ISI TMR Network School, 12-23 July 1999, Villa Gualino, Torino, Italy. – 2000. – Т. 66. – С. 345.
- [23] Dubin D. H. E. Theory of structural phase transitions in a trapped Coulomb crystal //Physical review letters. – 1993. – Т. 71. – №. 17. – С. 2753.
- [24] Schiffer J. P. Phase transitions in anisotropically confined ionic crystals //Physical review letters. – 1993. – Т. 70. – №. 6. – С. 818.
- [25] Kjærgaard N., Drewsen M. Observation of a structural transition for Coulomb crystals in a linear Paul trap //Physical review letters. – 2003. – Т. 91. – №. 9. – С. 095002.
- [26] Enzer D. G. et al. Observation of power-law scaling for phase transitions in linear trapped ion crystals //Physical review letters. – 2000. – Т. 85. – №. 12. – С. 2466.
- [27] Pearson C. E. Theory and application of planar ion traps : дис. – Massachusetts Institute of Technology, 2006.
- [28] García-Ripoll J. J., Zoller P., Cirac J. I. Speed optimized two-qubit gates with laser coherent control techniques for ion trap quantum computing //Physical Review Letters. – 2003. – Т. 91. – №. 15. – С. 157901.
- [29] Bentley C. D. B., Carvalho A. R. R., Hope J. J. Trapped ion scaling with pulsed fast gates //New Journal of Physics. – 2015. – Т. 17. – №. 10. – С. 103025.
- [30] Hill S., Wootters W. K. Entanglement of a pair of quantum bits //Physical review letters. – 1997. – Т. 78. – №. 26. – С. 5022.
- [31] См. доп. материалы к [29].

- [32] Bentley C. D. B. et al. Fast gates for ion traps by splitting laser pulses //New Journal of Physics. – 2013. – Т. 15. – №. 4. – С. 043006.
- [33] Mizrahi J. A. Ultrafast control of spin and motion in trapped ions : дис. – 2013.
- [34] Kapitza P. L., Dirac P. A. M. The reflection of electrons from standing light waves //Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. – Cambridge University Press, 1933. – Т. 29. – №. 2. – С. 297-300.
- [35] Wong-Campos J. D. et al. Demonstration of two-atom entanglement with ultrafast optical pulses //Physical review letters. – 2017. – Т. 119. – №. 23. – С. 230501.
- [36] Ratcliffe A. K. et al. Scaling Trapped Ion Quantum Computers Using Fast Gates and Microtraps //Physical review letters. – 2018. – Т. 120. – №. 22. – С. 220501.