Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской Академии Наук

На правах рукописи

Сидоров Павел Леонидович

Масштабирование квантового вычислителя на ионах иттербия-171 с использованием кудитов и быстрых квантовых вентилей

Специальность 1.3.19 —

Лазерная физика

Диссертация на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

член-корреспондент РАН,

доктор физико-математических наук

Колачевский Николай Николаевич

Москва – 2024

Оглавление

Введение 4

Глава 1. Захват и лазерное охлаждение ионов 13

1.1 Динамика иона в ловушке Пауля 13

1.2 Ионные кристаллы..... 16

1.3 Доплеровское охлаждение 19

1.4 Гамильтониан системы ион+поле 20

1.5 Охлаждение до основного колебательного состояния..... 22

1.6 Оптимизация процесса глубокого охлаждения 24

Основные результаты главы 1 28

Глава 2. Кудиты на ионах иттербия.....30

2.1 Ионные кубиты и кудиты 30

2.2 Ионы иттербия для квантовых вычислений..... 33

2.2.1 Доплеровское охлаждение.....34

2.2.2 Инициализация кудитов 36

2.2.3 Глубокое охлаждение.....36

2.2.4 Кудитные операции на ионах иттербия 37

2.2.5 Считывание состояний кудитов.....38

2.3 Экспериментальная установка..... 42

2.3.1 Ловушка Пауля и резонансный трансформатор.....42

2.3.2 Лазерная система.....44

2.3.3 Система считывания состояний и контроля магнитного поля.....47

2.4 Демонстрация работы вычислителя 49

2.4.1 Проведение однокудитных операций.....49

2.4.2 Проведение двухкубитной операции.....52

2.4.3 Анализ результата эксперимента 55

Основные результаты главы 2 57

Глава 3. Неадиабатические квантовые операции 58

3.1 Когерентные состояния 58

3.2 Спин-зависимые толчки 59

3.3 Неадиабатическое запутывание 61

3.4 Экспериментальная реализация неадиабатического запутывания 70

3.5 Аналитическое объяснение когерентных эффектов 75

3.6 Численное моделирование быстрого гейта 78

Заключение 85

Список литературы 88

Приложения 94

Гейт Мёльмера-Соренсена 94

Измерение достоверности двухкубитной операции 98

Введение

Диссертация посвящена теоретическому и экспериментальному исследованию методов масштабирования ионного квантового вычислителя. Рассматриваются такие методы, как переход от кубитной системы к кудитной и использование быстрых квантовых вентилей.

Актуальность работы

Впервые в 1980 году физик Пол Бениофф предложил использовать квантовую механику в вычислительных целях [1]. Эту идею продолжил Ричард Фейнман в 1982 году, добавив, что на гипотетическом квантовом компьютере возможно симулировать поведение квантовых систем [2]. Однако революционным открытием стала разработка Питером Шором в 1994 году квантового алгоритма по факторизации чисел, т.е. разложении числа на простые множители [3]. Шор теоретически доказал, что такая задача решается на квантовом компьютере за полиномиальное время, тогда как классические алгоритмы обеспечивают лишь экспоненциальное время. Это означает, что существует некоторое критическое количество единиц квантовой информации квантового вычислителя, кубитов, начиная с которого факторизация больших чисел на классическом компьютере значительно превысит время выполнения такой же задачи на квантовом компьютере. Такое потенциальное свойство квантовых компьютеров называют квантовым превосходством. Открытие Шора справедливо считается революционным, так как ставит под вопрос надёжность современных криптографических алгоритмов, например, алгоритм RSA, в основе которого лежит идея о невозможности быстрого решения задачи факторизации больших чисел. Следующее потенциальное практическое применение квантового компьютера было представлено в 1996 году: Лов Гровер предложил квантовый алгоритм поиска в базе данных [4]. Таким образом, существует целый класс практически важных задач, которые решаются квантовым компьютером потенциально быстрее, чем классическим.

Первая квантовая операция над двумя кубитами была реализована экспериментально в 1995 году группой учёных из университета NIST во главе с Кристофером Монро [5]. Команда учёных продемонстрировала операцию контролируемого отрицания (CNOT gate) над двумя захваченными в ловушку ионами бериллия. Собранная учёными система представляла собой первый двухкубитный квантовый компьютер. В следующие годы происходило дальнейшее масштабирование квантового вычислителя вплоть до настоящего времени. Так, в 2001 году на 7-кубитном квантовом компьютере IBM реализовали алгоритм Шора [6]. В качестве кубитов в этом компьютере использовались ядерные спины и явление ядерного магнитного резонанса для манипуляций их состояниями. В 2016 году группой Кристофера Монро был продемонстрирован 5-кубитный квантовый компьютер, основанный на захваченных в ловушку ионах $^{171}Yb^{+}$ [7]. Через три года команда представила 11-кубитный ионный квантовый компьютер [8]. В настоящее время компания IonQ, основанная учёными из группы Кристофера Монро, предоставляет облачный доступ к их 25-кубитному ионному квантовому вычислителю. В том же 2019 году учёные из компании Google достигли квантового превосходства на процессоре, состоящем из 53 сверхпроводящих кубитов [9]. Задача гауссового бозонного сэмплинга, выполненная на этом процессоре, была спроектирована как пример задачи, решаемой квантовым компьютером значительно быстрее классического, хотя и не представляла практического интереса.

Как было отмечено выше, в настоящее время существуют функционирующие квантовые компьютеры, основанные на захваченных в ловушку ионах и на сверхпроводниках. Ионные кубиты отличаются высоким отношением времени когерентности к времени выполнения операции [10], что позволяет выполнять больше операций с высокой достоверностью. Манипуляция состояниями таких кубитов осуществляется с помощью лазерных пучков: каждый ион ионной цепочки может быть адресован с помощью фокусирующей системы, системы пьезозеркал и дифракционных элементов. С увеличением числа ионов уменьшается расстояние между ними в цепочке, могут иметь место фазовые

переходы из одномерной конфигурации в двумерную [11,12]. Кроме того, собственные моды колебаний цепочки из большого числа ионов расположены близко к друг другу в частотном пространстве, что затрудняет их спектральное разрешение. Стоит также отметить, скорость нагрева ионной цепочки возрастает с увеличением длины цепочки, что предъявляет дополнительные требования к качеству предварительного охлаждения ионов. Несмотря на перечисленные проблемы масштабирования квантовых вычислений на ионных кубитах, ионы в цепочке обладают более сильной связью друг с другом из-за кулоновского взаимодействия. Это позволяет проводить двухкубитные операции над парами ионов в цепочке даже если они не являются соседними. Такие особенности ионных кубитов, наряду с перспективами их использования, превращают масштабирование ионного квантового вычислителя в одну из наиболее актуальных задач в области квантовых вычислений.

В настоящее время существует ряд подходов к масштабированию ионного квантового вычислителя: использование нескольких ловушек и отдельных областей для хранения информации и взаимодействия [13]; переход к неадиабатическим квантовым операциям [14], время выполнения которых сравнимо с периодом колебаний ионов в ловушке, позволяющий избавиться от проблемы разрешения отдельных колебательных мод цепочки ионов; использование большего количества внутренних квантовых состояний ионов для кодирования, что увеличивает объём доступного гильбертового пространства без добавления дополнительных ионов [15–17] – в таком случае ионные кубиты становятся ионными кудитами. Кроме того, дополнительные состояния ионов могут использоваться не только для хранения квантовой информации, но и применяться в качестве вспомогательных состояний для реализации мультикубитных квантовых операций таких, как, например, гейт Тоффоли [18,19].

Среди многообразия ионов, используемых в квантовых вычислениях ($^{25}Mg^{+}$ [20], $^{9}Be^{+}$ [21], $^{171}Yb^{+}$ [7], $^{43}Ca^{+}$ [22]), можно выделить $^{171}Yb^{+}$. Благодаря значительной массе иона задача достижения режима Лэмба-Дике упрощается, а

процесс лазерного охлаждения до основного колебательного состояния становится более эффективным. Также можно отметить относительную простоту структуры уровней иона иттербия, которая облегчает реализацию циклов охлаждения. Кроме того, структура уровней позволяет создавать не только кубиты, но и кудиты. Это, как было отмечено, расширяет потенциал масштабирования ионного квантового вычислителя.

Целью данной работы являлось исследование кодирования квантовой информации в оптические кудиты в ионе иттербия-171 и экспериментальная реализация полного набора одно- и двухкудитных операций, а также теоретическое исследование быстрых квантовых операций для масштабирования вычислительных возможностей ионного квантового компьютера.

Для достижения поставленной цели решались следующие **задачи**:

1. Создание экспериментальной установки, включая систему считывания кудитных состояний, систему адресации ионов и систему контроля магнитного поля.
2. Численное моделирование охлаждения иона в ловушке Пауля до основного колебательного состояния методом боковых колебательных частот.
3. Осуществление доплеровского охлаждения двух ионов иттербия в линейной ловушке Пауля, а также охлаждения до основного колебательного состояния аксиальных мод колебаний ионов.
4. Проведение однокудитных операций на паре ионов иттербия, захваченных в ловушку Пауля, а именно контролируемое возбуждение оптических переходов $^2S_{\frac{1}{2}}(F=0,\ m_F=0) \leftrightarrow\ ^2D_{\frac{3}{2}}(F=2,\ m_F=0)$, $^2S_{\frac{1}{2}}(F=0,\ m_F=0) \leftrightarrow\ ^2D_{\frac{3}{2}}(F=2,\ m_F=+1)$, $^2S_{\frac{1}{2}}(F=0,\ m_F=0) \leftrightarrow\ ^2D_{\frac{3}{2}}(F=2,\ m_F=-1)$
5. Проведение операции перепутывания кудитов (гейта Мёльмера-Соренсена) с помощью бихроматического лазерного поля, отстроенного по частоте от

резонанса с переходом $^2S_{\frac{1}{2}}(F = 0,\ m_F = 0) \leftrightarrow\ ^2D_{\frac{3}{2}}(F = 2,\ m_F = 0)$ и измерение достоверности проведённой операции.

6. Численное моделирование неадиабатической квантовой операции с использованием быстрых лазерных импульсов на паре ионов иттербия, захваченных в планарный массив ловушек Пауля, с учётом когерентных эффектов.

Научная новизна:

Предложен новый метод подбора параметров лазерных импульсов для осуществления лазерного охлаждения ионов до основного колебательного состояния. Впервые продемонстрирован полный набор квантовых операций (одно-и двухкудитных) на оптических кудитах, с использованием электронных состояний иона иттербия-171. Впервые предложен новый метод оценки достоверности неадиабатической операции перепутывания ионов с использованием быстрых лазерных импульсов с учётом когерентных эффектов.

Практическая значимость:

Метод оптимизации процесса лазерного охлаждения ионов на боковых колебательных частотах позволит достигать более низких температур ионного кристалла и более высоких показателей достоверности квантовых операций.

Продемонстрированная в данной работе реализация кудитных квантовых операций на оптических переходах ионов иттербия открывает возможности для дальнейшего масштабирования ионного квантового вычислителя вплоть до 100 кубит в одной линейной ловушке, что позволит выполнять полезные алгоритмы.

Предложенный в данной работе теоретический метод оценки достоверности быстрой операции перепутывания ионных кубитов может быть использован для предварительного подбора параметров для проведения эксперимента.

Шумные процессоры промежуточного масштаба (около 100 кубит) востребованы при решении практических задач оптимизации, квантовой химии, фармацевтики и могут быть использованы как в научных организациях (ФИАН, РКЦ, МГУ), так и в коммерческих организациях (Сбербанк, Газпромнефть).

Методология и методы исследования. В работе использовалась линейная квадрупольная ловушки Пауля, помещённая в вакуумную камеру, для захвата цепочки ионов иттербия. Для охлаждения ионов применялся метод доплеровского охлаждения, а также метод охлаждения до основного состояния на боковых колебательных частотах. Для инициализации состояния кубитов был использован метод оптической накачки. Стабилизация лазерной частоты по частоте моды резонатора выполнялась методом Паунда-Древера-Холла. Для осуществления операции перепутывания кудитов был использован гейт Мёльмера-Соренсена. Результаты экспериментов были аппроксимированы теоретическими моделями для вычисления необходимых параметров. Для численного моделирования использовались аналитические решения уравнения Шрёдингера.

Положения, выносимые на защиту:

1. Предложенный метод оптимизации лазерного охлаждения на боковых колебательных частотах, применённый к ионам $^{25}Mg^{+}$, позволяет согласно моделированию получить среднее колебательное число $\bar{n}$, равное 0.05 за 120 циклов охлаждения.
2. Использование подуровней терма $^{2}D_{3/2}$ в $^{171}Yb^{+}$ позволяет реализовать двухкудитный квантовый процессор с оптическими кудитами, эквивалентный четырёхкубитному процессору, с достоверностью однокудитных операций не менее 82% и достоверностью двухкудитной операции не менее 65% в условиях эксперимента.
3. Когерентные эффекты, возникающие при реализации неадиабатической операции перепутывания с ультракороткими лазерными импульсами, существенно влияют на её достоверность. Подбором времени свободной

эволюции между последовательными импульсами можно добиться увеличения достоверности до 95% для линейного массива из двух ионов в отдельных ловушках Пауля, и до 93% для цепочки из 7 ионов.

Достоверность полученных результатов обеспечивается воспроизводимостью экспериментов, использованием поверенного оборудования, а также согласованностью экспериментальных данных и теоретической модели.

Личный вклад. При непосредственном участии автора была собрана экспериментальная установка для демонстрации работы ионного квантового вычислителя. Лично автором была разработана и сконструирована система контроля магнитного поля. Также был изготовлен резонансный трансформатор с оптимальными параметрами для питания электродов ловушки Пауля. Автор принимал активное участие в проектировании и сборке системы считывания состояний ионов и системы адресации. Автором была собрана система стабилизации частоты лазера методом Паунда-Древера-Холла. Автор разработал программный код для численного моделирования процесса охлаждения ионов до основного колебательного состояния методом боковых частот и предложил новый метод оптимизации параметров. Автор самостоятельно провёл теоретические исследования быстрых квантовых операций на ионах и показал, что когерентные эффекты могут существенно влиять на достоверность неадиабатической операции перепутывания ионных кубитов. Наличие когерентных эффектов было продемонстрировано как аналитически, так и численно с помощью разработанного программного кода. Также автором была разработана модель двумерного массива ловушек Пауля, рассчитан спектр колебательных мод ионов в такой конфигурации и проведено численное моделирование неадиабатической операции запутывания пары ионов с учётом когерентных эффектов.

Апробация работы. Результаты работы докладывались лично автором на 4х российских и международных научных конференциях:

1. П.Л. Сидоров, И.В. Заливако, А.С. Борисенко, И.А. Семериков, К.Ю. Хабарова «Оптимизация процесса рамановского охлаждения иона $^{25}Mg^{+}$ до основного колебательного состояния в линейной ловушке Пауля», XVI Всероссийский молодежный Самарский конкурс – конференция научных работ по оптике и лазерной физике, Самара, Россия, 2018 г.
2. Сидоров П., Заливако И., Аксёнов М., Борисенко А., Семериков И., Хабарова К., Колачевский Н. «Влияние когерентных эффектов на достоверность операции перепутывания ионных кубитов с использованием ультрабыстрых лазерных импульсов», «Физика ультрахолодных атомов - 2021», Новосибирск, Россия, 2021 г.
3. П.Л.Сидоров, М.Д.Аксёнов, И.В.Заливако, А.С.Борисенко, И.А.Семериков, Н.Н.Колачевский, К.Ю.Хабарова «Ограничение достоверности двухкубитной операции при использовании быстрых лазерных импульсов», XI семинар Д.Н.Клышко, Москва, Россия, 2022 г.
4. Pavel Sidorov, Ilia Zalivako, Alexander Borisenko, Ilya Semerikov, Andrei Korolkov, Kristina Galstyan, Nikita Semenin, Vasiliy Smirnov, Mikhail Aksenov, Ksenia Khabarova, Nikolay Kolachevsky «Protection of trapped ion quantum states from magnetic field noise for qudit-based quantum computations», VII International Conference on Quantum Technologies (ICQT-2023), Москва, Россия, 2023 г.

Публикации автора по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в 3х научных статьях в рецензируемых научных изданиях, индексируемых Web of Science и Scopus:

1. M. A. Aksenov, I. V. Zalivako, I. A. Semerikov, A. S. Borisenko, N. V. Semenin, P. L. Sidorov, A. K. Fedorov, K. Yu. Khabarova, and N. N. Kolachevsky Realizing quantum gates with optically addressable $^{171}Yb^{+}$ ion qudits //Physical Review A. – 2023. – Т. 107. – №. 5. – С. 052612.
2. Sidorov P., Aksenov M., Zalivako I., Borisenko A., Semerikov I., Khabarova K., & Kolachevsky N. Coherent effects of pulsed fast gate in 1D-and 2D ion quantum computer architectures //Physics Letters A. – 2022. – Т. 450. – С. 128370.

3. P. L. Sidorov, I. V. Zalivako, A. S. Borisenko, I. A. Semerikov, K. Y. Khabarova Optimization of Raman Cooling of $^{25}Mg^{+}$ Ion to Ground Vibrational State in Linear Paul Trap //Bulletin of the Lebedev Physics Institute. – 2019. – T. 46. – C. 138-142.

Глава 1. Захват и лазерное охлаждение ионов

1.1 Динамика иона в ловушке Пауля

Для удержания ионов в некоторой небольшой области пространства используются специальные конфигурации магнитных и электрических полей. Существует два типа ионных ловушек – ловушка Пеннинга, в которой производится захват с помощью комбинации статического квадрупольного электрического поля и однородного магнитного поля, и ловушка Пауля, в которой ионы захватываются в неоднородном радиочастотном электрическом поле. В квантовых вычислениях применяются оба типа ловушек, здесь будет рассмотрена ловушка, используемая в данной работе, – квадрупольная ловушка Пауля.

Рассмотрим ион, находящийся в электрическом потенциале, задающемся функцией

$$F(x,y,z,t) = \underbrace{U\frac{1}{2}(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2)}_{\textit{статический потенциал}} + \underbrace{\tilde{U}\,cos(\,\omega_{rf}t)\frac{1}{2}(\alpha' x^2 + \beta' y^2 + \gamma' z^2)}_{\textit{осциллирующий потенциал}}, \quad (1.1)$$

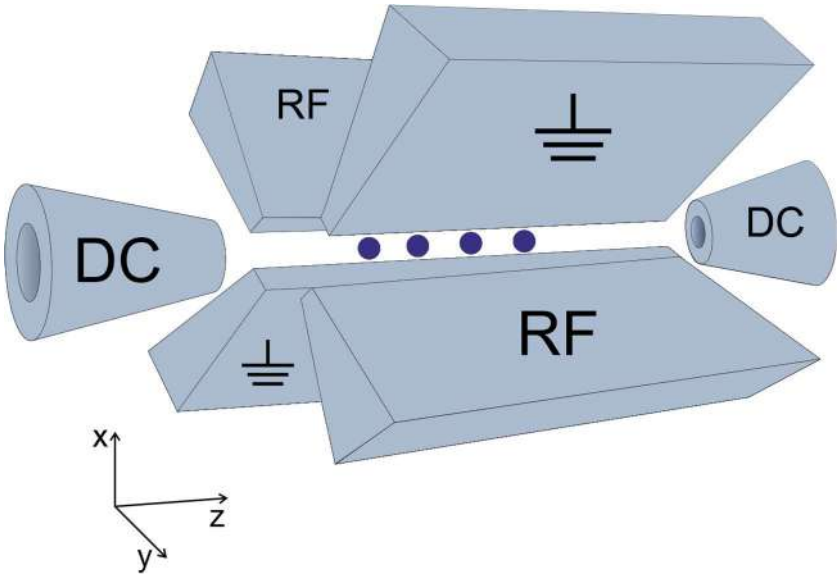


Рис. 1.1 Линейная квадрупольная ловушка Пауля. DC-электроды создают постоянный удерживающий потенциал вдоль оси ловушки, при помощи радиочастотных (RF) и земляных электродов создаётся радиочастотный потенциал, обеспечивающий удержание перпендикулярно оси.

,где ω_{rf} – циклическая частота изменения потенциала, $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ – геометрические параметры ловушки. Потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа в любой момент времени: $\Delta F = 0$, так что имеют место уравнения:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ \alpha' + \beta' + \gamma' = 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Наборы таких коэффициентов, удовлетворяющим уравнениям (1.2), соответствуют разным конфигурациям ловушки Пауля, так $\alpha = \beta = -\gamma/2, \alpha' = \beta' = -\gamma'/2$ соответствует трёхмерной квадрупольной конфигурации, $\alpha = \beta = -\gamma/2, \alpha' = -\beta', \gamma' = 0$ – линейная квадрупольная конфигурация (Рис. 1.1).

Второй закон Ньютона для динамики иона в потенциале (1.1) может быть записан в виде (аналогично для остальных осей):

$$\ddot{x} = -\frac{Z|e|}{m}\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{Z|e|}{m}[U\alpha + \widetilde{U}\, cos(\,\omega_{rf}t)\alpha']x, \tag{1.3}$$

где $Z|e|, m$ – заряд и масса иона. Такое уравнение сводится к дифференциальному уравнению Матье:

$$\frac{d^2x}{d^2\xi} + [a_x + 2q_x\, cos(\,2\xi)]x = 0 \tag{1.4}$$

с заменой

$$\xi = \frac{\omega_{rf}t}{2}, a_x = \frac{4Z|e|U\alpha}{m\omega_{rf}^2}, q_x = \frac{2Z|e|\,\widetilde{U}\alpha'}{m\omega_{rf}^2}. \tag{1.5}$$

По теореме Флоке [23] можно представить решение уравнение в виде:

$$x = Ae^{i\beta_x\xi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n}e^{i2n\xi} + Be^{-i\beta_x\xi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n}e^{-i2n\xi}, \tag{1.6}$$

где A, B – константы, зависящие от начальных условий, C_{2n}, β_x – функции от a_x, q_x. Подставив это решение в уравнение (1.5), можно получить рекуррентное соотношение для коэффициентов:

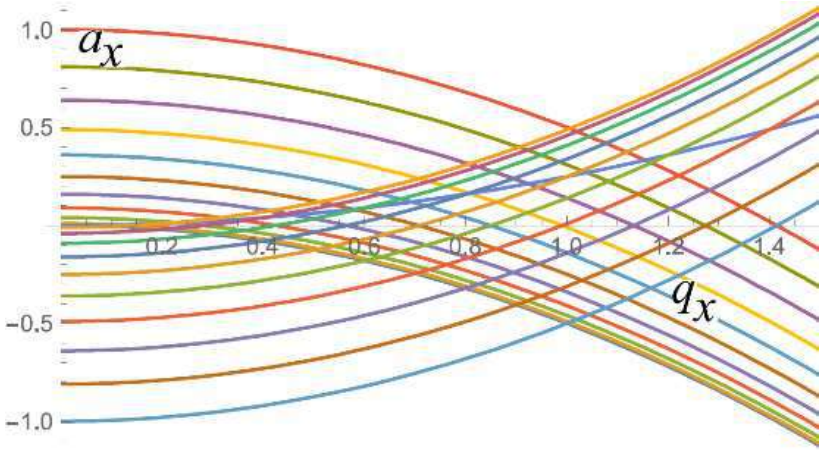


Рис. 1.2 Область стабильности линейной квадрупольной ловушки Пауля.

$$C_{2n+2} - D_{2n}C_{2n} + C_{2n-2} = 0$$
$$D_{2n} = \frac{[a_x - (2n + \beta_x)^2]}{q_x}, \tag{1.7}$$

что также можно записать в виде непрерывной дроби:

$$C_{2n+2} = \frac{C_{2n}}{D_{2n} - \dfrac{1}{D_{2n+2} - \dfrac{1}{\ldots}}}$$

$$\beta_x^2 = a_x - q_x\left(\frac{1}{D_0 - \dfrac{1}{D_2 - \dfrac{1}{\ldots}}} + \frac{1}{D_0 - \dfrac{1}{D_{-2} - \dfrac{1}{\ldots}}}\right). \tag{1.8}$$

Таким образом можно вычислить значения коэффициентов с любой наперёд заданной точностью. В случае, если коэффициент β_i нецелое число, решение уравнения Матье стабильно. В системе координат (a, q) области стабильности можно отобразить как области пересечения кривых, соответствующим различным нецелым значениям β_i. Первая область стабильности, в которой $0 < \beta_x, \beta_y < 1$, для линейной ловушки показана на Рис.1.2. На практике при захвате ионов в основном используется только первая область стабильности.

Уравнение колебания иона в ловушке в первом приближении ($C_{\pm 4} \approx 0, |a_x|, q_x^2 \ll 1$) и начальными условиями $A = B$ запишется в виде [24]:

$$x(t) \approx 2AC_0 \cos\left(\beta_x \frac{\omega_{rf}}{2} t\right)\left[1 - \frac{q_x}{2}\cos(\omega_{rf} t)\right], \quad (1.9)$$

где $\beta_x \approx \sqrt{a_x + \frac{q_x^2}{2}}$. Отсюда видно, что динамика иона представляет собой суперпозицию двух колебаний: медленного на частоте $\omega_{sec} = 2\pi\nu = \beta_x \frac{\omega_{rf}}{2} \ll \omega_{rf}$, называемого секулярным колебанием, и быстрого на частоте ω_{rf} приложенного радиочастотного поля, называемого микродвижением. В приближении малой амплитуды микродвижения можно представить движение иона как гармонические колебания с частотой ω_{sec} в псевдопотенциале.

1.2 Ионные кристаллы

При поимке нескольких ионов в линейную ловушку Пауля из-за наличия потенциала ловушки и кулоновского взаимодействия ионы при достаточно низких температурах порядка нескольких мК образуют так называемый ионный кристалл, расположенный вдоль оси ловушки (Рис. 1.1). Для нахождения положений равновесия ионов в линейном ионном кристалле, исследуем потенциальную энергию взаимодействия системы из N ионов в ловушке [11]:

$$V = \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{2} M\omega_z^2 z_m(t)^2 + \sum_{\substack{n,m=1 \\ m\neq n}}^{N} \frac{kZ^2e^2}{2} \frac{1}{|z_n(t) - z_m(t)|}, \quad (1.10)$$

где M, Ze – масса и заряд каждого иона и $k \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2}$. Для малых смещений от положения равновесия можно записать

$$z_m(t) \approx z_m^{(0)} + q_m(t), \quad (1.11)$$

где $z_m^{(0)}$ – положение равновесия m-ого иона. Положения равновесия можно найти как экстремумы потенциальной энергии:

$$\left[\frac{\partial V}{\partial z_m}\right]_{\{z_m\}=\{z_m^{(0)}\}} = 0. \quad (1.12)$$

Введём безразмерные положения равновесия как $u_m = z_m^{(0)}/l$, где

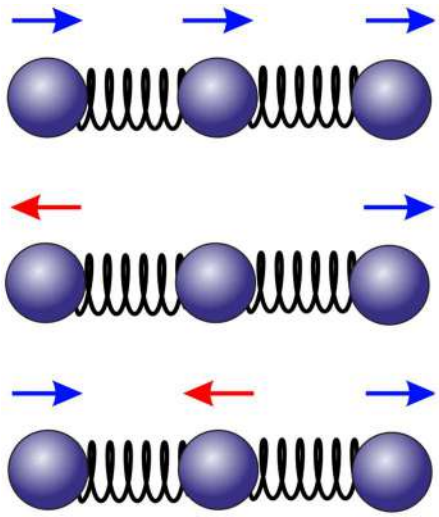


Рис. 1.3 Осевые колебательные моды для трёх ионов в линейной ловушке Пауля.

$$l^3 = \frac{kZ^2e^2}{M\nu^2}. \tag{1.13}$$

Тогда уравнения (1.12) перепишутся в виде

$$u_m - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{(u_m - u_n)^2} + \sum_{n=m+1}^{N} \frac{1}{(u_m - u_n)^2} = 0, \tag{1.14}$$

где m пробегает значения от 1 до N. Данная система уравнений может быть решена при помощи численных методов.

Произвольное малое колебание ионной цепочки может быть разложено по нормальным модам коллективных колебаний ионов (Рис. 1.3). Нормальная мода задаётся частотой и вектором, описывающим вклад каждого иона в колебание. Задача их нахождения сводится к вычислению собственных значений и собственных векторов матрицы Гессе для функции потенциальной энергии:

$$\sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z_i \partial z_j} \right)_{\{z_i\}=\{z_i^{(0)}\}} b_{p,j} = m\omega_{z,p}^2 b_{p,j}, \tag{1.15}$$

где p – номер колебательной моды, j – номер компоненты амплитудного вектора. Выражение также можно переписать, используя безразмерные переменные, введённые ранее:

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij} b_{p,j} = \left(\frac{\omega_{z,p}}{\omega_z}\right)^2 b_{p,i}, \tag{1.16}$$

где

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 + 2\sum_{l \neq i} \frac{1}{\left|u_i^0 - u_l^0\right|^3}, & j = i \\ -\frac{2}{\left|u_i^0 - u_l^0\right|^3}, & j \neq i \end{cases} \tag{1.17}$$

Экстраполяция данных численного моделирования при разных значения N [11] при решении уравнений (1.14) даёт следующее выражение для вычисления минимального расстояния между ионами в цепочке (для центральных ионов):

$$u_{min}(N) \approx \frac{2.018}{N^{0.559}}, \tag{1.18}$$

что для ловушки с частотой $\omega = 1$ МГц с $N = 100$ ионами $^{171}Yb^+$ даёт $z_{min} \approx 1.5$ мкм, а для $N = 500$ расстояние становится равным ≈ 500 нм, что сравнимо с длиной волны оптического излучения. Другие эмпирические формулы дают похожие оценки, как например, основанная на жидкостном представлении ионного облака [25]:

$$u_{min}(N) = 1.92 N^{-2/3} ln(aN)^{1/3}, \tag{1.19}$$

где $a \approx 0.794$. Таким образом, начиная с некоторого числа ионов, находящихся в одном и том же гармоническом потенциале, пространственное разрешение отдельных ионов становится всё более сложной задачей, что затрудняет масштабирование ионного квантового вычислителя. Одним из альтернативных подходов или конфигураций ионов является расположение каждого из них в своём собственном гармоническом потенциале, например, при использовании массивов ловушек Пауля. Этот подход позволяет выбрать оптимальное расстояние между ионами, при котором каждый ион может быть адресован оптическим полем без паразитного воздействия на соседние ионы, сохраняя при этом достаточную силу взаимодействия между ионами для успешного выполнения мультикубитных операций. В главе 3 настоящей диссертации будут

описаны результаты численного моделирования процесса неадиабатического запутывания ионов, находящихся в таком массиве ловушек.

1.3 Доплеровское охлаждение

Первым этапом охлаждения ионов для реализации квантовых вычислений является доплеровское охлаждение. Данный тип лазерного охлаждения проводится с помощью воздействия лазерного излучения, отстроенного по частоте в красную область от резонанса с некоторым широким дипольно-разрешённым переходом. При этом должно выполняться условие $\Gamma \gg \omega_{\text{сек}}$, где $\Gamma -$ ширина возбужденного уровня (режим неразрешенных колебательных частот). В таком режиме циклы поглощения и излучения происходят гораздо быстрее секулярных колебания иона в ловушке, и можно считать, что ион находится под воздействием некоторой средней силы светового давления, зависящей от скорости. Т.к. лазерное излучение отстроено в красную область от резонанса, то из-за эффекта Доплера ион, двигающийся навстречу лазерному пучку, поглощает фотон и тормозится с большей вероятностью по сравнению с обратным движением, что в итоге приводит к потере его кинетической энергии и охлаждению. Однако процессы поглощения и излучения фотона носят случайный характер, поэтому имеет место также и нагрев. Когда процессы нагрева и охлаждения уравновешивают друг друга, достигается предельная температура доплеровского охлаждения [26]:

$$T_D = \frac{\hbar\Gamma}{2k_B}, \tag{1.20}$$

где $k_B -$ постоянная Больцмана. Можно при этом показать, что наибольшая эффективность охлаждения достигается при отстройке от резонанса, равной $\frac{\Gamma}{2}$. Обычно ширина верхнего уровня составляет несколько десятков МГц, что даёт температуру доплеровского предела порядка 1 мК.

1.4 Гамильтониан системы ион+поле

В большинстве случаев доплеровского охлаждения недостаточно для проведения квантовых операций с высокой достоверностью, поэтому выполняется следующий этап охлаждения – охлаждение до основного колебательного состояния [27]. Для детального изучения эволюции иона под действием лазерного излучения рассмотрим гамильтониан системы ион+поле. Заметим, что ион является квантовым осциллятором с частотой колебания ω_{sec}, также для простоты положим, что ион имеет два внутренних электронных состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$ с разностью энергий $\hbar\omega_0$. Тогда гамильтониан иона будет иметь вид:

$$H_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\omega_{sec}\hat{a}^\dagger\hat{a}, \tag{1.21}$$

с точностью до константы, где a^+, a – операторы рождения и уничтожения колебательной моды. Гамильтониан взаимодействия вещества с электромагнитным полем в общем случае можно записать в виде [28]:

$$\widehat{H}_I = -\frac{e}{m_e c}\hat{p}\hat{A}, \tag{1.22}$$

где $\hat{p}$ – оператор импульса электрона, взаимодействующего с излучением, $\hat{A}$ – вектор-потенциал электромагнитного поля. Для простоты положим, что электромагнитное поле имеет вид плоской монохроматической волны. Будем считать, что число фотонов поля велико, поэтому верно выражение для вектор-потенциала из классической электродинамики:

$$\hat{A} = \frac{A_0\hat{\epsilon}}{2}\left[e^{i(\boldsymbol{k}(\hat{\boldsymbol{r}}_e+\hat{\boldsymbol{r}}_i)-\boldsymbol{\omega}t+\phi)} + e^{-i(\boldsymbol{k}(\hat{\boldsymbol{r}}_e+\hat{\boldsymbol{r}}_i)-\boldsymbol{\omega}t+\phi)}\right], \tag{1.23}$$

где ω – частота монохроматической волны, $\hat{\epsilon}$ – единичный вектор поляризации, $\hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{e}}, \hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}$ – операторы координат электрона и иона соответственно. Чтобы получить вид гамильтониана в базисе $|0\rangle$, $|1\rangle$, нужно выполнить интегрирование $\langle\psi_0|H_I|\psi_1\rangle$ по координате электрона, значения матричных элементов будут зависеть от конкретных состояний $|0\rangle$ и $|1\rangle$, поляризации излучения, направления

волнового вектора, амплитуды A_0. После интегрирования гамильтониан будет содержать только координаты иона:

$$\widehat{H}_I = \frac{\hbar\Omega}{2}(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)\left(e^{i(\boldsymbol{k}\hat{\boldsymbol{r}}_i - \omega t + \phi)} + e^{-i(\boldsymbol{k}\hat{\boldsymbol{r}}_i - \omega t + \phi)}\right), \tag{1.24}$$

где Ω – резонансная частота Раби. В этом выражении сделано допущение о малости диагональных элементов, что выполняется в большинстве задач, возникающих на практике. Полный гамильтониан системы в итоге записывается в виде:

$$\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{H}_I. \tag{1.25}$$

Для более наглядного описания эволюции состояния иона под действием падающего лазерного излучения удобно перейти в представление взаимодействия и записать гамильтониан в виде:

$$\widehat{H}_{int} = \widehat{U}_0^{\dagger}\widehat{H}_I\widehat{U}_0, \tag{1.26}$$

где

$$\widehat{U}_0 = \exp\left(-\frac{i\widehat{H}_0 t}{\hbar}\right). \tag{1.27}$$

Можно показать, что при таком преобразовании часть гамильтониана $\widehat{H}_I$, зависящая от координат иона, примет вид (для простоты считаем, что лазерный пучок направлен вдоль оси колебания иона):

$$\begin{aligned} &e^{i\omega_{sec}\hat{a}^{\dagger}\hat{a}t}\left(e^{i(\boldsymbol{k}\hat{\boldsymbol{r}}_i - \omega t + \phi)} + e^{-i(\boldsymbol{k}\hat{\boldsymbol{r}}_i - \omega t + \phi)}\right)e^{-i\omega_{sec}\hat{a}^{\dagger}\hat{a}t} \\ &= \mathrm{e}^{i(-\omega t + \phi)}\exp\left[i\eta\left(\hat{a}e^{-i\omega_{sec}t} + \hat{a}^{\dagger}e^{i\omega_{sec}t}\right)\right] + h.c., \end{aligned} \tag{1.28}$$

где $\eta = k\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_{sec}}}$ – параметр Лэмба-Дике, определяющий отношение размера волновой функции иона в основном колебательном состоянии к длине волны излучения. Электронная часть гамильтониана после перехода в представление взаимодействия будет содержать комплексные экспоненты вида $\mathrm{e}^{\pm i(\omega+\omega_0)t}$ и $\mathrm{e}^{\pm i(\omega-\omega_0)t}$. Т.к. $\omega + \omega_0 \gg \omega - \omega_0$, вклад в эволюцию состояния слагаемых

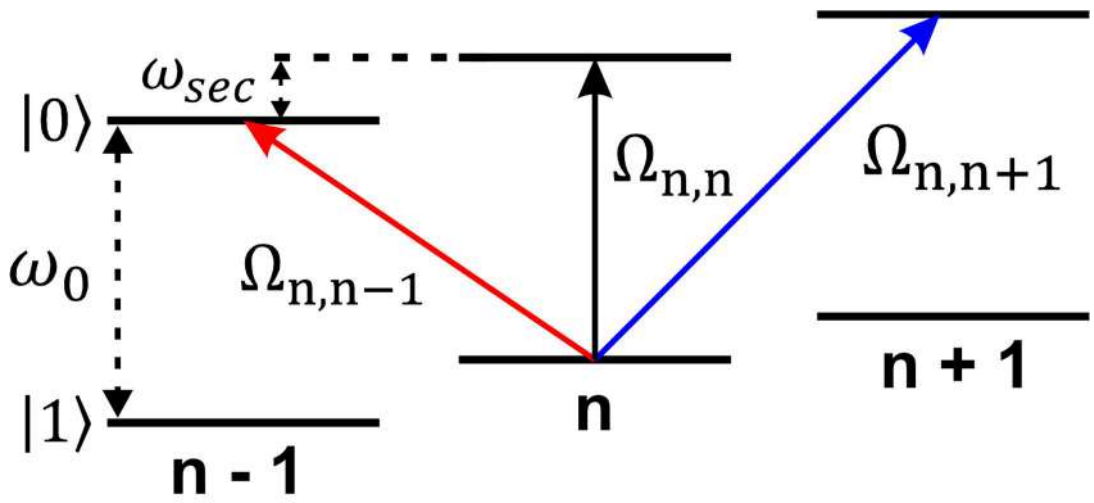


Рис. 1.4 Электронно-колебательные резонансы при взаимодействии иона с излучением в режиме Лэмба-Дике. Частоты Раби для различных типов переходов (на несущей частоте, с отстройкой ω_{sec} в «красную» или «синюю» области).

первого типа пренебрежимо мал по сравнению со слагаемыми первого типа (приближение вращающейся волны). Итоговый гамильтониан в представлении взаимодействия выражается следующим образом:

$$\hat{H}_{int} = \frac{\hbar\Omega}{2}\hat{\sigma}_+ \exp\left[i\eta\left(\hat{a}e^{-i\omega_{sec}t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega_{sec}t}\right)\right] e^{i(\phi-\delta t)} + h.c., \qquad (1.29)$$

где $\delta = \omega - \omega_0$.

1.5 Охлаждение до основного колебательного состояния

Обычно после доплеровского охлаждения иона достигается режим Лэмба-Дике, т.е. выполняется условие

$$\eta\sqrt{\langle(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)^2\rangle} \ll 1. \qquad (1.30)$$

Выполнение этого условия позволяет разложить экспоненту в выражении (1.30) до первого порядка по параметру Лэмба-Дике:

$$\hat{H}_{LD} = \frac{\hbar\Omega}{2}\hat{\sigma}_+\left[1 + i\eta(\hat{a}e^{-i\omega_{sec}t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega_{sec}t})\right]e^{i(\phi-\delta t)} + h.c. \qquad (1.31)$$

Положим теперь, что для перехода $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ колебательный спектр иона спектрально разрешён, т.е. для ширины уровня $|0\rangle$ выполнено условие $\Gamma \ll \omega_{sec}$. На практике такое условие выполняется чаще всего для оптических

мультипольных переходов, магнитных переходов, а также для рамановских переходов. В таком случае, выбирая различные отстройки лазерного излучения от резонанса, можно получить три принципиально разных случая. В первом случае $\delta = 0$:

$$\widehat{H}_c = \frac{\hbar\Omega}{2}\left(\hat{\sigma}_+ e^{i\phi} + \hat{\sigma}_- e^{-i\phi}\right), \tag{1.32}$$

откуда видно, что эволюция состояния иона с таким гамильтонианом будет представлять собой резонансные переходы $|0\rangle|n\rangle \leftrightarrow |1\rangle|n\rangle$, т.е. изменение электронного состояния без изменения числа колебательных квантов. Во втором случае $\delta = \omega_{sec}$, гамильтониан имеет вид:

$$\widehat{H}_b = \frac{\hbar\Omega\eta}{2}\left(\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_+ e^{i\phi} + \hat{a}\hat{\sigma}_- e^{-i\phi}\right). \tag{1.33}$$

При таком взаимодействии будут происходить осцилляции Раби между состояниями $|0\rangle|n+1\rangle$ и $|1\rangle|n\rangle$ с частотой Раби $\Omega\eta\sqrt{n+1}$, т.е. электронно-колебательные переходы с изменением числа колебательных квантов на единицу. При отстройке лазерного излучения от резонанса в красную область гамильтониан имеет похожий вид:

$$\widehat{H}_r = \frac{\hbar\Omega\eta}{2}\left(\hat{a}\hat{\sigma}_+ e^{i\phi} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- e^{-i\phi}\right). \tag{1.34}$$

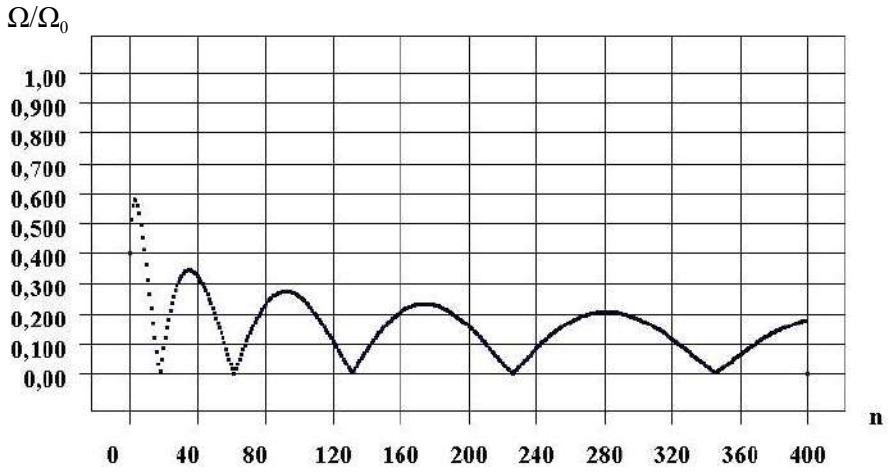


Рис. 1.5 Зависимость частоты Раби $\Omega_{n,n+1}$ от n при параметре Лэмба-Дике, равном 0.44.

Взаимодействие, описываемое выражением (1.34), имеет ключевое значение в теории охлаждения иона до основного колебательного состояния. Действительно, если система первоначально находилась в основном электронном состоянии $|1\rangle$ и колебательном состоянии $|n\rangle$, то через время пи-импульса t_π, определяемого выражением $\int_0^{t_\pi} \Omega_R dt = \pi$, где $\Omega_R = \Omega\eta\sqrt{n}$, система окажется в состоянии $|0\rangle|n-1\rangle$. Далее ион может быть возвращён обратно в электронное состояние $|1\rangle$, например, с помощью некоторых дополнительных электронных уровней и лазерных пучков. Заметим, что так как взаимодействие происходит в режиме Лэмба-Дике, спонтанные распады будут происходить преимущественно без изменения числа колебательных квантов. Описанную процедуру затем можно повторить несколько раз, постепенно уменьшая количество фононов в моде. Так происходит охлаждение до основного колебательного состояния методом боковых колебательных частот. В процессе перекачки и спонтанного излучения ион случайным образом всё же приобретает дополнительные колебательные кванты, что приводит к нагреву. Кроме того, зависимость частот Раби от n для электронно-колебательных переходов немонотонна, что приводит к скоплению населённостей на некоторых высоких колебательных уровнях. Перечисленные факторы ограничивают эффективность охлаждения и задают предельную температуру охлаждения на боковых колебательных частотах.

1.6 Оптимизация процесса глубокого охлаждения

Для предотвращения скапливания населённости на отдельных колебательных уровнях из-за обращения в ноль частот Раби между некоторыми колебательными переходами (Рис. 1.5) применяют схемы охлаждения с отстройкой на $\delta = 2\omega_{sec}$, возбуждая переходы $|0\rangle|n\rangle \leftrightarrow |1\rangle|n-2\rangle$, и схемы с чередованием отстройки от импульса к импульсу [29]. В рамках данной работы было произведено исследование различных схем охлаждения методом боковых колебательных частот на примере охлаждения одиночного иона $^{25}Mg^+$, а также предложен новый метод оптимизации параметров охлаждения. Выбор иона для численного моделирования глубокого охлаждения обусловлен историческим контекстом

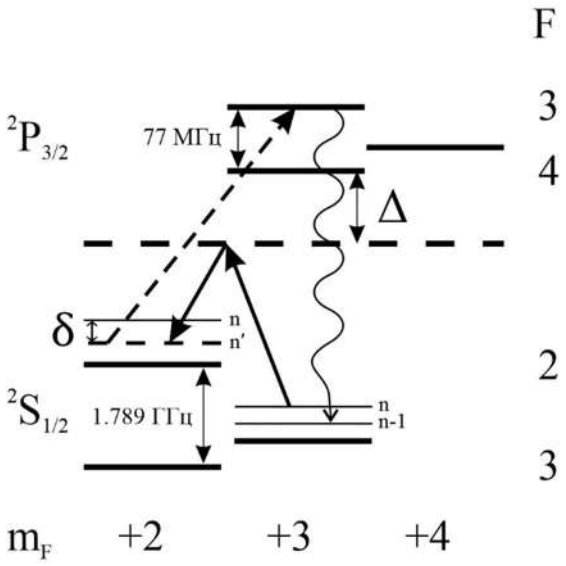


Рис. 1.6 Частичная схема уровней $^{25}Mg^+$. Прерывистая стрелка показывает связанные посредством перекачивающего лазера уровни, волнистой стрелкой показан спонтанный распад обратно в цикл охлаждения.

исследований в нашей лаборатории. Предложенный метод оптимизации легко обобщается на процесс охлаждения ионов любого типа. Данный метод позволяет оптимизировать не только частоты импульсов, как показано в работе [29], но и длительности импульсов.

В данном ионе глубокое охлаждение реализуется на рамановском переходе $2S_{1/2}|F=3,m_F=3\rangle \leftrightarrow^2 S_{1/2}|F=2,m_F=2\rangle$ с помощью двух лазерных пучков на длине волны 285 нм, отстроенных от уровня $2P_{3/2}|F=4,m_F=3\rangle$ на величину порядка 10 ТГц (Рис. 1.6). Обратно в цикл охлаждения ион возвращается методом оптической накачки через промежуточный уровень $2P_{3/2}|F=3,m_F=3\rangle$ с помощью перекачивающего лазера на длине волны около 280 нм. Положим, что перекачивающий импульс и спонтанный распад переносят населённость только между колебательными уровнями с одним номером. Тогда каждый цикл охлаждения представляет собой перенос населённости с колебательного уровня с номером n на колебательный уровень с номером n-1 или n-2 в зависимости от отстройки. Населённость колебательного уровня с номером n после одного цикла можно записать в виде [30]

$$P_n = P_n(0)(1-\sin^2(\Omega_{n+l,n}t/2))) + P_{n+1}(0)\sin^2(\Omega_{n+l,n}t/2), \qquad (1.35)$$

где

$$\Omega_{n+l,n} = \Omega_0 e^{-\frac{\eta^2}{2}} \sqrt{\frac{n!}{(n+l)!}} \eta^l L_n^l(\eta^2), \quad (1.36)$$

Ω_0 – частота Раби без учёта колебательных уровней, $L_n^l(\eta^2)$ – обобщённый

ω_m	η, для перпендикулярных рамановских пучков	Доплеровский предел (Тепловое распределение)	Начальное $\bar{n}$
$2\pi \times 1$ МГц	0.44	1 мК	20.42

Табл. 1 Параметры, используемые в численном моделировании процесса охлаждения до основного колебательного состояния.

полином Лагерра, l принимает значение 1 или 2.

В качестве параметров в численном моделировании были использованы параметры имеющейся в лаборатории экспериментальной установки по захвату и охлаждению ионов $^{25}Mg^+$. Используемые параметры приведены в таблице 1. Численное моделирование проводилось следующим образом. Сначала генерировался массив населённостей, распределённых по колебательным уровням по закону Больцмана, населённости на уровнях с номерами выше 400 полагались равными нулю. К массиву применялось выражение (1.35) для каждого n. Далее с полученным новым массивом населённостей для следующего цикла охлаждения повторялась та же процедура. Задача оптимизации состояла в том, чтобы получить $\bar{n} = \sum P_n n$ близкое к нулю после нескольких последовательных циклов охлаждения, подобрав набор длительностей и отстроек. В качестве начального набора отстроек была выбрана схема охлаждения 25x2+15x1 [29] (25 циклов охлаждения с отстройкой $-2\omega_m$ и 15 циклов с отстройкой $-\omega_m$). Последовательность повторялась три раза, так что суммарное количество импульсов равно 120. При оптимизации общее количество импульсов фиксировалось. Каждой из серий 25x2 или 15x1 соответствовала длительность

импульсов t_i, такая, что $\Omega_{n_i,n_i-l}t_i = \pi$ для некоторого n_i, длительности импульсов внутри одной серии не варьировались. Для начального набора отстроек был найден набор n_i, дающих некоторый локальный минимум среднего колебательного числа. После этого варьировался набор отстроек с сохранением количества импульсов, равного 40 в каждой из трёх серий. Для удобства схема охлаждения была записана в виде (25+d1)x2+(15-d1)x1, (25+d2)x2+(15-d2)x1, (25+d3)x2+(15-d3)x1, и затем варьировался набор чисел (d1,d2,d3) около предыдущего локального минимума (около 0,0,0 в начальном случае). Был найден новый набор чисел (d1, d2, d3), дающий меньшее значение среднего колебательного числа после проведения 120 импульсов. Процедура подбора n_i и (d1, d2, d3) повторялась несколько раз, пока не был достигнут оптимальный набор (d1, d2, d3), равный (0,0,0). По итогам оптимизации получено состояние с $\overline{n} = 0.05$ и населённостью нулевого колебательного уровня 99.8 %. Для частоты Раби $\Omega_0 = 150$ кГц длительность процесса охлаждения составляет около 1.5 мс, без учёта длительности импульсов перекачки. При учёте характерной длительности импульсов перекачки порядка 10 мкс общая длительность процесса составляет около 3 мс. Оптимальный набор параметров представлен в таблице 2. Зависимость среднего колебательного числа от порядкового номера охлаждающего импульса и конечное распределение населённостей приведены на

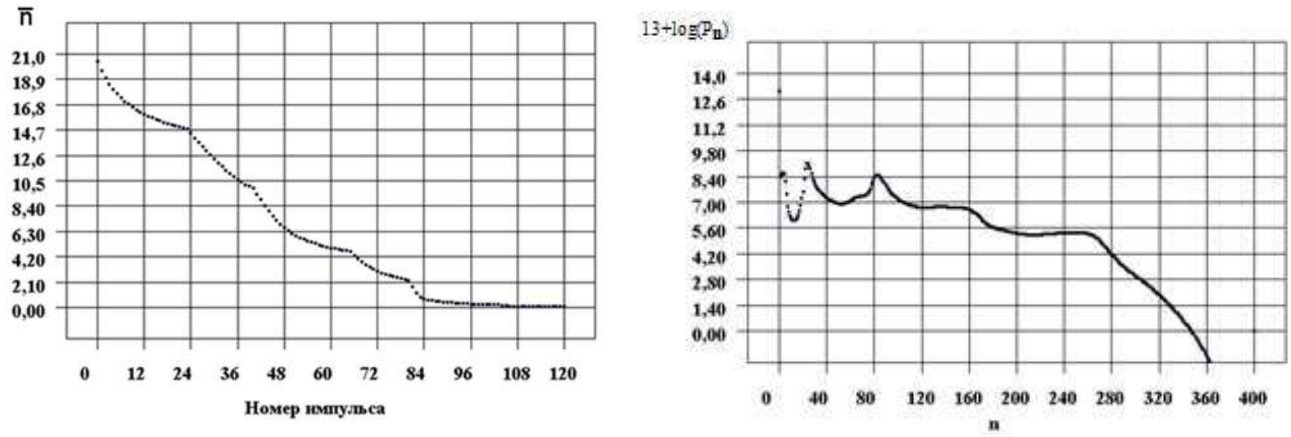


Рис. 1.7а: Изменение среднего колебательного числа в процессе охлаждения; б: Распределение населённостей колебательных уровней после охлаждения. Из графика видно, что населённость нулевого колебательного уровня превышает населённости остальных уровней на 3-4 порядка и более.

рисунках 1.7а и 1.7б.

Было проведено сравнение предложенной оптимальной стратегии с другими схемами. Например, если в каждом цикле охлаждения оптимизировать отстройку и длительность в диапазоне от 0 до 30 мкс (характерные времена в предложенной стратегии 10-15 мкс), минимизируя $\bar{n}$ после каждого цикла, то может быть получено $\bar{n} \approx 0.6$ после 120 циклов охлаждения. Поэтому подобная прямолинейная оптимизационная стратегия не является оптимальной. Другая

Отстройка	$-2\omega_m$	$-\omega_m$	$-2\omega_m$	$-\omega_m$	$-2\omega_m$	$-\omega_m$
n, где $\Omega_{n,n-l}t = \pi$	26	13	25	12	23	11
Кол-во импульсов	23	17	25	15	25	15

Табл. 2 Оптимизированная стратегия глубокого охлаждения иона $^{25}Mg^{+}$ до $\bar{n} = 0.05$.

интуитивная стратегия, для которой импульс с номером i имеет длительность t_i, удовлетворяющую условию $t_i = \pi/\Omega_{n_0-i,n_0-i-1}$, где n_0 – номер некоторого колебательного уровня, представляет собой перекачку населённостей с колебательного уровня с номером n_0 на $n_0 - 1$, с уровня $n_0 - 1$ на $n_0 - 2$ и так далее до нулевого колебательного уровня. Подобная схема охлаждения также не является оптимальной, так как частоты Раби для некоторых n оказываются близкими к нулю, что приводит к значительно более высокой длительности охлаждения.

Основные результаты главы 1

Предложен новый метод оптимизации процесса глубокого охлаждения ионов и произведено численное моделирование охлаждения одиночного иона магния-25 за 120 циклов охлаждения с температуры доплеровского

предела до температуры, соответствующей среднему колебательному числу равному 0.05.

Основные результаты данной главы опубликованы в [31].

Глава 2. Кудиты на ионах иттербия

2.1 Ионные кубиты и кудиты

Система из двух произвольных электронных состояний $|0\rangle$ и $|1\rangle$ захваченного в ловушку иона представляет собой кубит. Обычно такими состояниями являются компоненты сверхтонкой структуры с разницей энергий, лежащей в области радиочастот. Радиочастотные кубиты отличаются высоким временем релаксации T1. Манипуляция квантовыми состояниями кубитов этого типа может быть проведена напрямую посредством воздействия резонансных радиочастотных полей или через возбуждение некоторого двухфотонного резонанса двумя лазерным пучками, как, например, в микроволновых кубитах на основе ионов кальция-43 [22] и иттербия-171 [33]. Альтернативой радиочастотному кубиту является оптический кубит, обычно представляющий собой два электронных состояния, между которыми запрещён дипольный электрический переход, но разрешён электрический переход более высокой мультипольности. Оптическая адресация такого кубита может быть произведена с помощью одного лазерного пучка, что упрощает конструкцию экспериментальной установки и снижает требования к оптическому доступу и конфигурации ионной цепочки при масштабировании квантового вычислителя. Также стоит отметить, что оптические кубиты демонстрируют более высокую достоверность считывания и подготовки квантовых состояний из-за большей

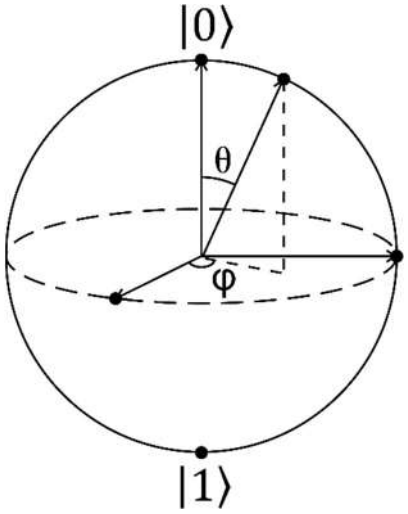


Рис.2.1 Состояние кубита на сфере Блоха.

разности энергий между кубитными уровнями. Время релаксации оптического кубита в большинстве случаев меньше, чем время релаксации радиочастотного кубита, однако достаточно для проведения большого количества квантовых операций, например, при использовании неадиабатических операций.

Произвольная однокубитная квантовая операция может быть проведена при помощи воздействия резонансного с кубитным переходом лазерного импульса с правильным выбором фазы и площади импульса (такое взаимодействие описывается гамильтонианом (1.32). Схематически операцию можно представить как произвольный поворот вектора-состояния на так называемой сфере Блоха [34] (Рис. 2.1). При этом состояние кубита записывается в виде:

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle. \quad (2.1)$$

Если рассматривать пространство состояний кубита, как некоторое гильбертово пространство с базисом $|0\rangle$ и $|1\rangle$, то однокубитная операция представляет собой произвольную унитарную матрицу 2×2. В общем случае пространство состояний системы из N кубитов является гильбертовым пространством с базисом из 2^N векторов: $|00..00\rangle, |00..01\rangle, |00..10\rangle, \ldots |11..11\rangle$, произвольная N-кубитная операция в таком случае есть унитарная матрица размерности $2^N \times 2^N$. Заметим, что такой формализм позволяет не только рассматривать каждый ион как отдельный кубит, но и кодировать несколько кубитов в одном ионе, если принимать во внимание дополнительные электронные уровни. В этом случае каждый ион представляет собой кудит. Например, кроме состояний $|0\rangle$ и $|1\rangle$ ион может иметь также состояния $|2\rangle$ и $|3\rangle$ (Рис. 2.2), тогда если обозначить состояния как

$$\begin{aligned} |0\rangle &\equiv |00\rangle, \\ |1\rangle &\equiv |01\rangle, \\ |2\rangle &\equiv |10\rangle, \\ |3\rangle &\equiv |11\rangle, \end{aligned} \quad (2.2)$$

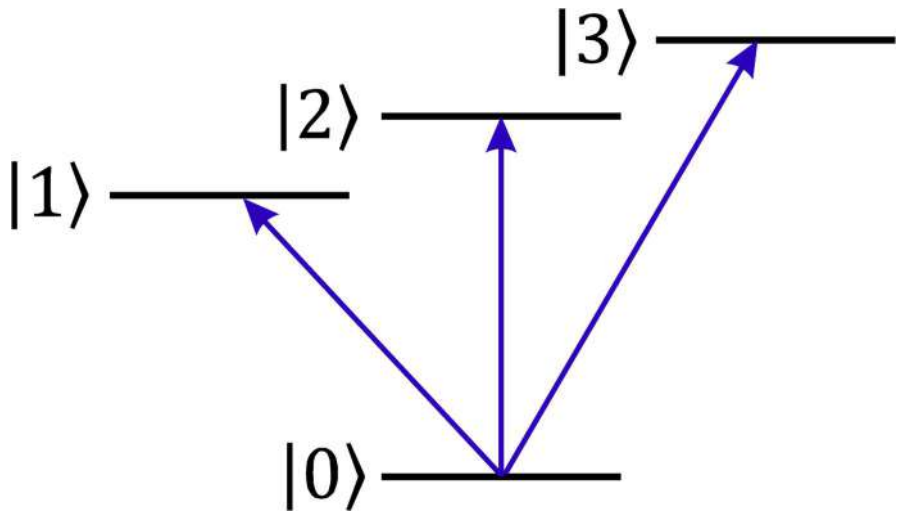


Рис. 2.2 Состояния кудита и резонансные переходы между ними, возбуждаемые оптическим полем.

то можно видеть, что система из N ионных кудитов эквивалентна системе из 2N ионных кубитов. Однокудитные операции проводятся таким же образом, как и однокубитные операции на кубитной системе, то есть с помощью воздействия резонансного с переходом между двумя кудитными состояниями оптического поля. Легко видеть, что в случае, когда кудитные состояния достаточно далеко разнесены друг от друга по энергии, динамика населённостей между ними также представляют собой осцилляции Раби. Масштабирование ионного квантового вычислителя значительно упрощается таким образом, т.к. при одинаковой размерности гильбертова пространства кудитная система требует вдвое меньшего количества захваченных ионов.

Можно показать, что набор произвольных однокудитных квантовых операций вместе с операцией перепутывания кубитов, закодированных в двух различных ионах, образуют универсальный набор квантовых операций [15,35], т.е. произвольная квантовая операция может быть приближена с любой наперёд заданной точностью конечной последовательностью операций, состоящей только из операций универсального набора. На данный момент наиболее практичной реализацией операции перепутывания ионных кубитов является гейт Мёльмера-Соренсена [36].

В настоящее время продемонстрирован ионный кудитный квантовый процессор, основанный на захваченных в ловушку ионах $^{40}Ca^{+}$ [35]. В качестве кудитных состояний были выбраны подуровни Зеемана состояния $^{2}D_{5/2}$ и уровень $^{2}S_{1/2}$. Переходы между кудитными состояниями осуществляются с помощью воздействия резонансного лазерного излучения на длине волны 729 нм.

2.2 Ионы иттербия для квантовых вычислений

В данной работе впервые было предложено создание оптических кудитов на основе ионов $^{171}Yb^{+}$ и реализован двухкудитный квантовый процессор. Структура уровней иона иттербия-171 (Рис. 2.3) позволяет хранить квантовую информацию по крайней мере в 4 квантовых состояниях:

$$\begin{aligned} &^{2}S_{1/2}|F=0;m_F=0\rangle,\\ &^{2}D_{3/2}|F=2;m_F=0\rangle,\\ &^{2}D_{3/2}|F=2;m_F=+1\rangle,\\ &^{2}D_{3/2}|F=2;m_F=-1\rangle. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Выбор подуровней терма $^{2}D_{3/2}$ в качестве логических обусловлен сравнительно большим временем жизни, которое составляет 53 мс. Состояние $^{2}D_{3/2}|F=$

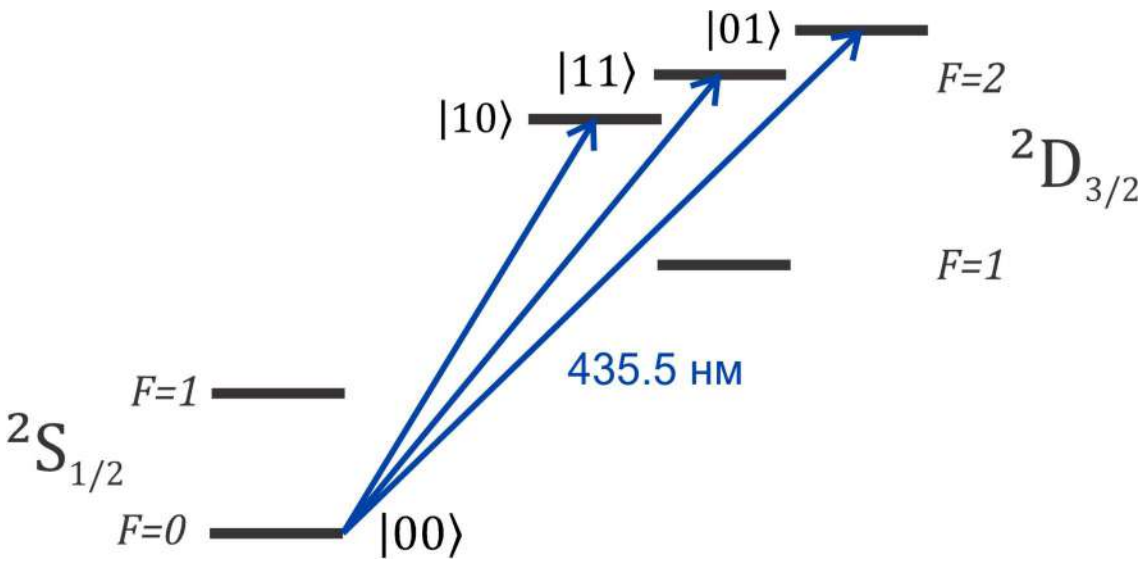


Рис. 2.3 Частичная схема уровней $^{171}Yb^{+}$. Стрелки показывают возбуждение переходов между различными кудитными состояниями с помощью воздействия резонансных лазерных полей (однокудитные операции).

$2; m_F = 0\rangle$ при этом нечувствительно к флуктуациям магнитного поля в первом порядке, поэтому данный вид шума не будет оказывать существенное влияние на качество квантовых операций, использующих его. Состояния с ненулевой проекцией полного момента, однако, сильно подвержены влиянию флуктуаций магнитного поля, что требует, например, использования материалов с большим значением магнитной проницаемости для защиты экспериментальной установки от воздействия внешних магнитных полей [35]. Ещё одним подходом к уменьшению декогеренции является применение метода динамической развязки (dynamical decoupling) [37].

В состояниях (2.3) можно закодировать два кубита, например, следующим образом (Рис. 2.3):

$$\begin{gathered} {}^2S_{1/2}|F = 0; m_F = 0\rangle \equiv |00\rangle, \\ {}^2D_{3/2}|F = 2; m_F = 0\rangle \equiv |11\rangle, \\ {}^2D_{3/2}|F = 2; m_F = -1\rangle \equiv |10\rangle, \\ {}^2D_{3/2}|F = 2; m_F = +1\rangle \equiv |01\rangle. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Несомненно, можно также использовать оставшиеся магнитные подуровни сверхтонкого расщепления терма ${}^2D_{3/2}$ и магнитные подуровни верхней компоненты сверхтонкого расщепления терма ${}^2S_{1/2}$ в качестве кубитных, тогда каждый ион-кудит можно рассматривать как три отдельных кубита.

2.2.1 Доплеровское охлаждение

Первый этап подготовки кубитов, доплеровское охлаждение (Рис. 2.4), реализуется с помощью лазерного излучения на длине волны 369.5 нм, отстроенного по частоте от резонанса с переходом ${}^2S_{1/2}|F = 1\rangle \leftrightarrow {}^2P_{1/2}|F = 0\rangle$ с помощью акусто-оптического модулятора (АОМа). При этом ширина уровня ${}^2P_{1/2}$ составляет около 20 МГц [38]. Также используется электро-оптический модулятор (ЭОМ) с частотой модуляции 14.7 ГГц для создания дополнительной спектральной компоненты излучения, связывающей уровни ${}^2S_{1/2}|F = 0\rangle$ и ${}^2P_{1/2}|F = 1\rangle$, т.к. нагретые ионы могут иметь ненулевую населённость состояния

$^2S_{1/2}|F=0\rangle$. Для терма $^2P_{1/2}$ $^2S_{1/2}$ не является единственным каналом распада; с некоторой вероятностью, примерно в 0.5% случаев ион может распасться в состояние $^2D_{3/2}$, поэтому, чтобы вернуть ион обратно в цикл охлаждения используется перекачивающий лазер с длиной волны 935.2 нм, связывающий термы $^2D_{3/2}$ и $^3[3/2]_{1/2}$. Последний терм обозначен символом, отличным от обозначения состояний водородоподобного атома, так как в данном состоянии *L, S, J* не могут быть измерены одновременно. Поэтому используется формализм *JK*-связи или *J1L2*-связи. В этом типе связи полный момент внутренней электронной системы $J1$ суммируется с орбитальным моментом валентных электронов $L2$, образуя квантовое число K. Далее спин валентных электронов $S2$ суммируется с K, образуя полный момент J, при этом терм обозначается как $^{2S2+1}[K]_J$. Излучение перекачивающего лазера также модулируется на частоте 3.07 ГГц для перекачки населённости со всех уровней сверхтонкой структуры. Далее при спонтанном

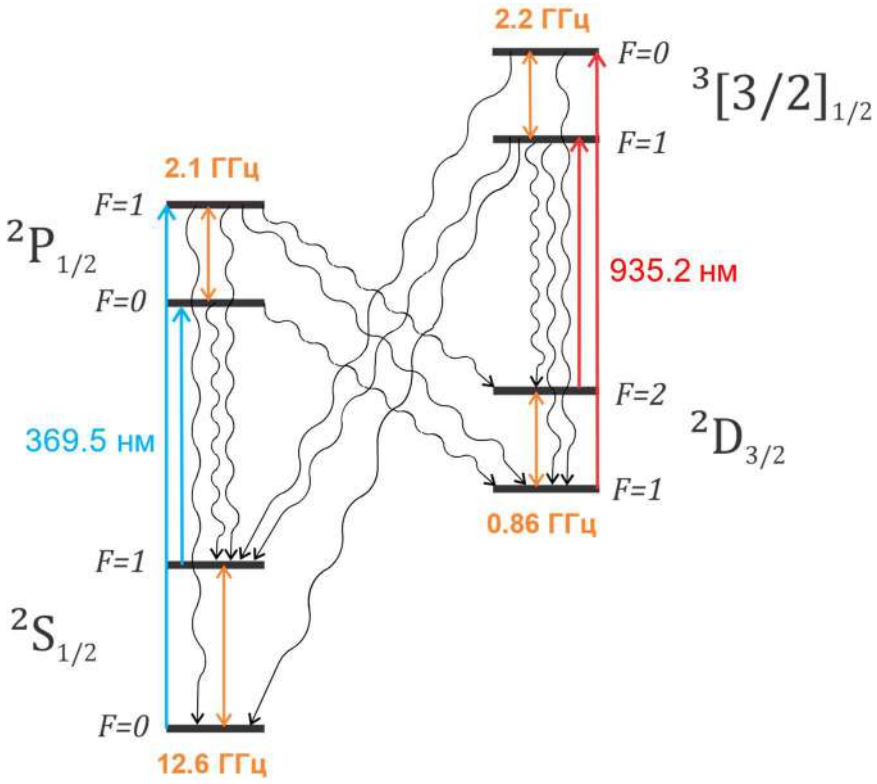


Рис. 2.4 Электронные переходы в ионе иттербия-171 в процессе доплеровского охлаждения.

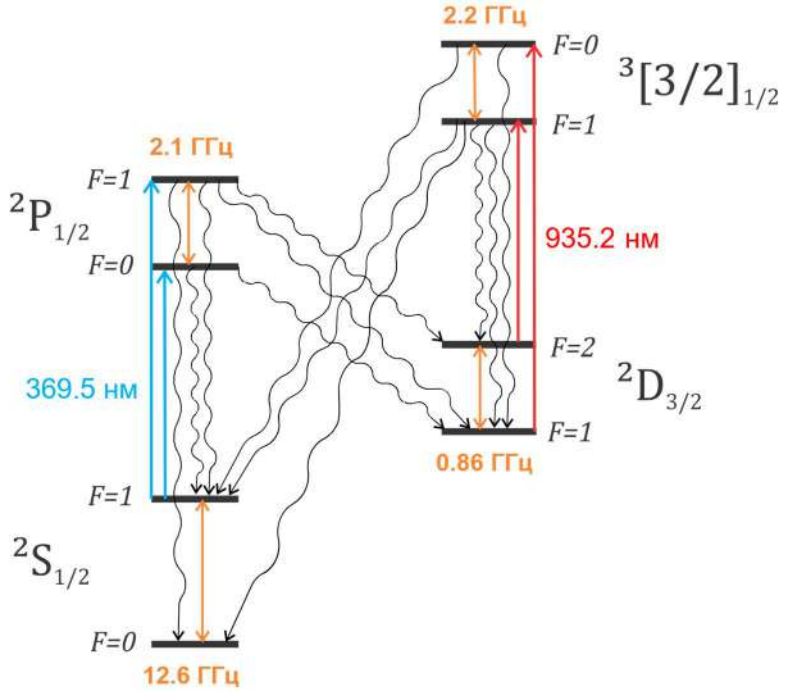


Рис. 2.5 Электронные переходы в ионе иттербия-171 в процессе инициализации квантового состояния. Состояние $^2S_{1/2}|F=0;m_F=0\rangle$ является тёмным, поэтому в него происходит оптическая накачка.

распаде с $^3[3/2]_{1/2}$ ион возвращается обратно в цикл охлаждения.

2.2.2 Инициализация кудитов

Следующим шагом выполняется инициализация всех кудитов в начальное квантовое состояние. В данной работе таким состоянием является $^2S_{1/2}|F=0;m_F=0\rangle$. Оптическую накачку [39] в данное состояние можно произвести по похожей на доплеровское охлаждение схеме, если использовать модуляцию на 2.1 ГГц вместо 14.7 ГГц (Рис. 2.5). Т.к. в таком случае не присутствует излучение, связывающее уровень $^2S_{1/2}|F=0;m_F=0\rangle$ с каким-либо другим уровнем, но существует несколько каналов распада на данный уровень: $^2P_{1/2}|F=1\rangle \rightarrow {}^2S_{1/2}|F=0;m_F=0\rangle$, $^3[3/2]_{1/2}|F=1\rangle \rightarrow {}^2S_{1/2}|F=0;m_F=0\rangle$, через некоторое время большая часть населённости скопится в $^2S_{1/2}|F=0;m_F=0\rangle$.

2.2.3 Глубокое охлаждение

Как было отмечено ранее, для достижения максимальных достоверностей квантовых операций необходимо более глубокое охлаждение ионов. Заметим, что

переход $^2S_{1/2}|F=0;m_F=0\rangle \leftrightarrow {}^2D_{3/2}|F=2;m_F=0\rangle$ удовлетворяет условию $\Gamma \ll \omega_{\text{сек}}$, т.к. данный переход является квадрупольным с шириной около 3 Гц, а частота ловушки обычно составляет порядка 0.5-2 МГц.

Поэтому на этом переходе возможна реализация охлаждения до основного колебательного состояния методом боковых колебательных частот с использованием лазера на длине волны 435.5 нм и акустооптического модулятора для настройки частоты излучения на колебательные резонансы. Обратно в цикл охлаждения ион может быть возвращён с помощью перекачивающего (на длине волны 935.2 нм) и охлаждающего лазера (на длине волны 369.5 нм). Эту последовательность возбуждения резонанса и перекачки необходимо повторить некоторое количество раз до получения среднего колебательного числа $\bar{n} \ll 1$.

2.2.4 Кудитные операции на ионах иттербия

На рисунке 2.3 видно, что лазерное излучение на длине волны 435.5 нм может быть также использовано для квантовых операций: однокудитные операции $|00\rangle \leftrightarrow |01\rangle$, $|00\rangle \leftrightarrow |10\rangle$, $|00\rangle \leftrightarrow |11\rangle$ могут быть выполнены при помощи одного лазерного пучка, отстроенного по частоте на нужный резонанс с помощью АОМа. При этом для индивидуальной адресации каждого отдельного кудита требуется пространственное смещение пучка, что достигается, например,

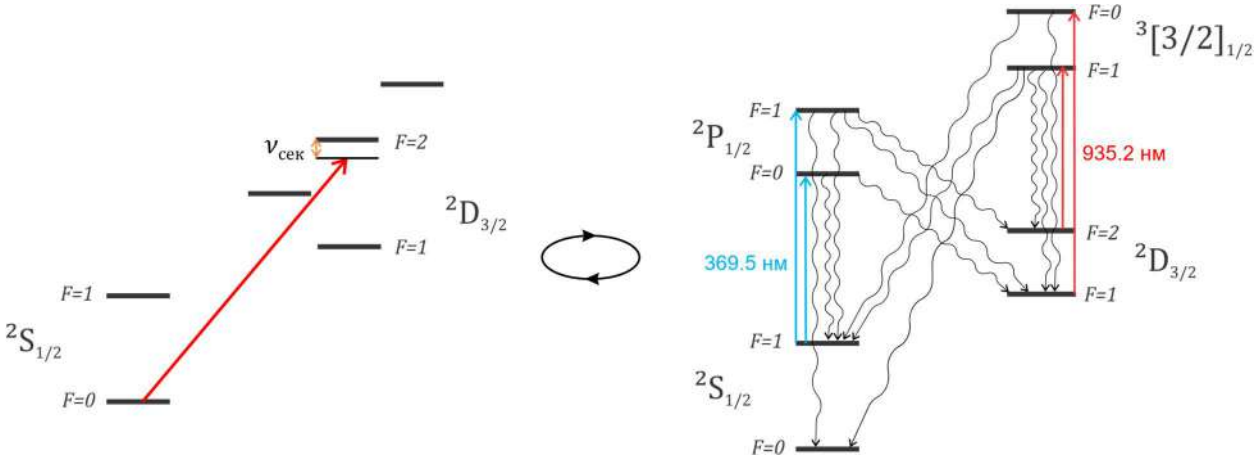


Рис. 2.6 Глубокое охлаждение ионов иттербия. Процесс охлаждения состоит из циклов возбуждения «красного» колебательного резонанса перехода $^2S_{1/2}|F=0;m_F=0\rangle \leftrightarrow {}^2D_{3/2}|F=2;m_F=0\rangle$ и оптической накачки обратно в $^2S_{1/2}|F=0;m_F=0\rangle$.

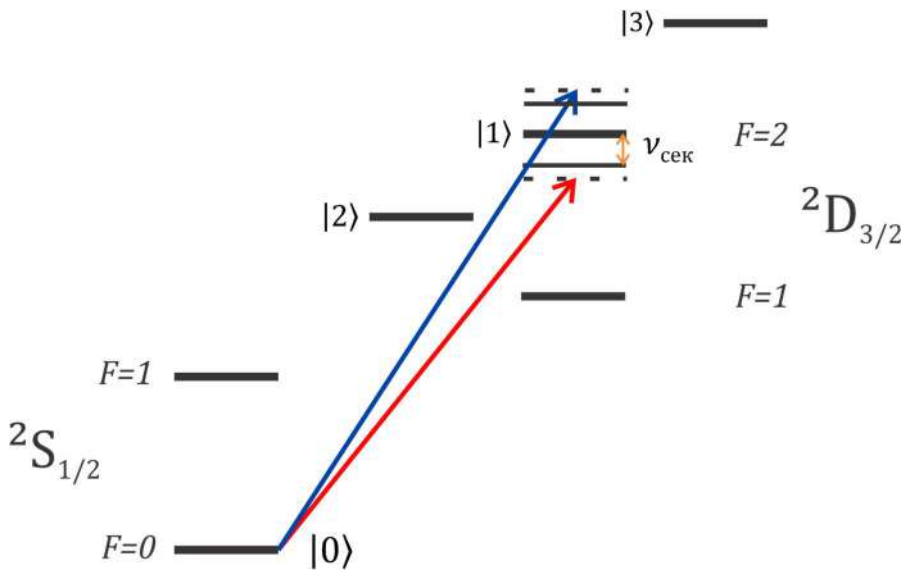


Рис. 2.7 Возбуждаемые переходы в ионах иттербия при реализации гейта Мёльмера-Соренсена.

при помощи акустооптических дефлекторов (АОДов).

Гейт Мёльмера-Соренсена для перепутывания двух кудитов также возможно провести, используя лазерные пучки на длине волны 435.5 нм, если подавать на АОМ бихроматический сигнал с частотами, близкими к резонансным с «красным» и «синим» колебательными резонансами для перехода $^2S_{1/2}|F = 0; m_F = 0\rangle \leftrightarrow {}^2D_{3/2}|F = 2; m_F = 0\rangle$. При этом в случае двухкудитного квантового компьютера не требуется адресация каждого и, и пучок может быть направлен вдоль оси ловушки, возбуждая оба иона.

2.2.5 Считывание состояний кудитов

После подготовки кудитов и проведения некоторого количества квантовых операций из универсального набора необходимо выполнить считывание состояний кудитов. То есть в рассматриваемом случае необходимо определить населённости 16 базисных состояний. В данной работе индивидуальное считывание каждого из ионов не было реализовано: излучение от обоих ионов собиралось линзой и фокусировалось на одном канале ФЭУ (Рис. 2.10). Флюоресценция иона под действием приложенного излучения (Рис. 2.8а) означает, что ион находится в состоянии $|0\rangle$, флюоресценция иона с предварительным воздействием π- импульса, резонансного с переходом $|0\rangle \leftrightarrow |k\rangle$

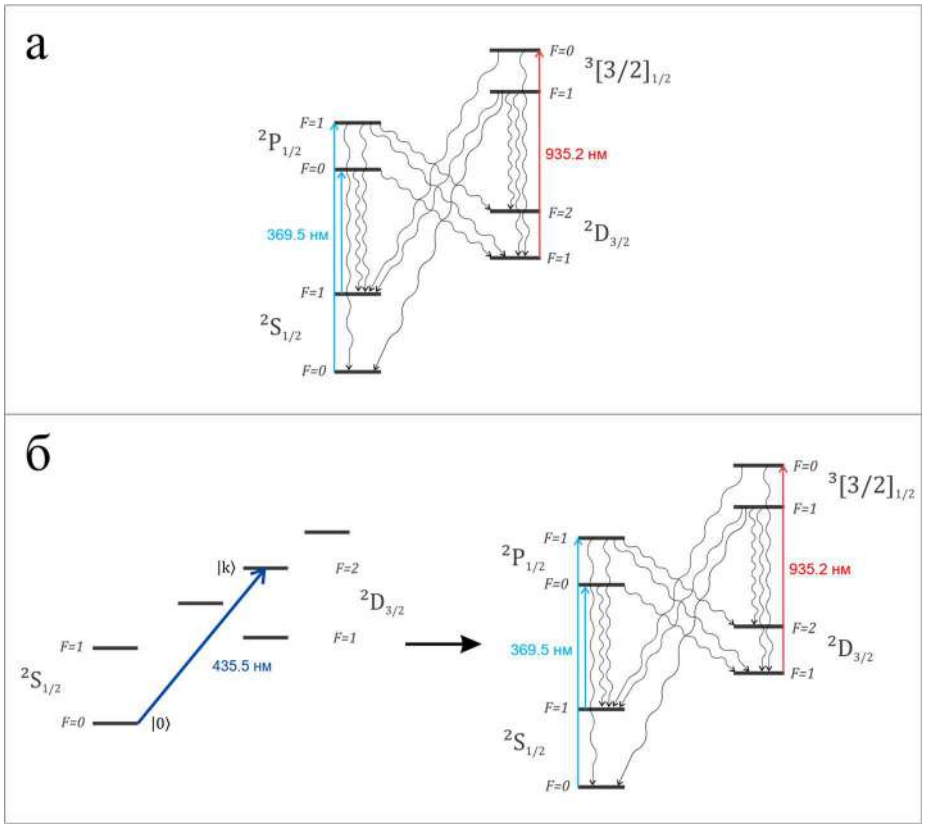


Рис. 2.8 Электронные переходы в процессе считывания состояний кудитов. Считывание представляет собой один из двух процессов:а – получение сигнала флюоресценции по схеме, аналогичной доплеровскому охлаждению, за исключением спектральной компоненты лазерного излучения на длине волны 935 нм, уменьшающей населённость кудитного уровня $^2D_{3/2}|F=2\rangle$; б – проведение π-импульса, резонансного с переходом $|0\rangle \leftrightarrow |k\rangle$, и затем получение сигнала флюоресценции. В простейшем случае, при измерении состояния одного кудита вариант а соответствует считыванию населённости состояния $|0\rangle$, вариант б – населённости состояния $|k\rangle$. Для двух кудитов процесс измерения описан далее в п. 2.2.5.

(Рис. 2.8б), соответствует нахождению иона в состоянии $|\mathrm{k}\rangle$, т.к. π-импульс меняет местами населённости состояний $|0\rangle$ и $|\mathrm{k}\rangle$. В зависимости от числа собранных фотонов можно сделать вывод о том, какое количество ионов флюоресцирует: 0, 1 или 2, то есть полученный сигнал будет лежать в диапазонах $0 < s \leq d_1$, $d_1 < s \leq d_2$, $s > d_2$, где d_1 и d_2 – некоторые выбранные дискриминаторы.

Подготовку кудитов, цепочку квантовых операций, процедуру считывания сигнала (Рис. 2.9) необходимо провести большое число раз для сбора статистики. Затем вычисляются отношения числа исходов с двумя светлыми ионами и с ровно

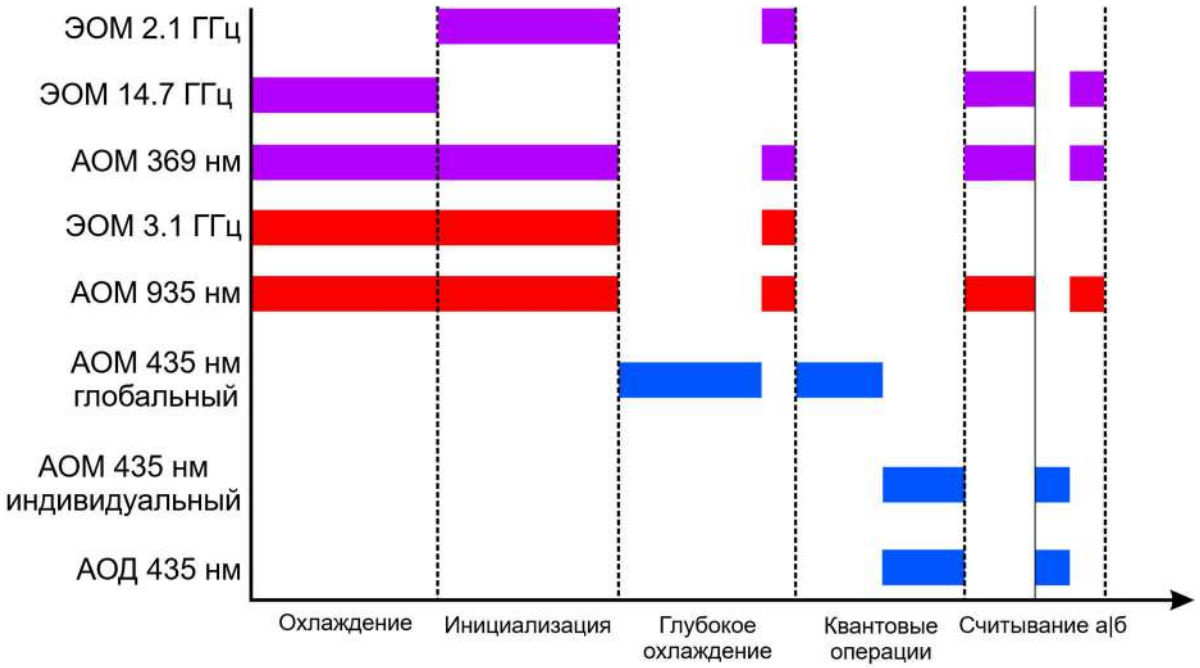


Рис. 2.9 Последовательность работы кудитного квантового вычислителя.

одним светлым ионом к общему числу измерений. Полученные два числа равны суммам населённостей таких состояний, в которых флюоресцируют оба иона или ровно 1 (обозначим их как p(2) и p(1)), то есть каждый вариант измерения даёт 2 уравнения на населённости базисных состояний. Всего простейших вариантов

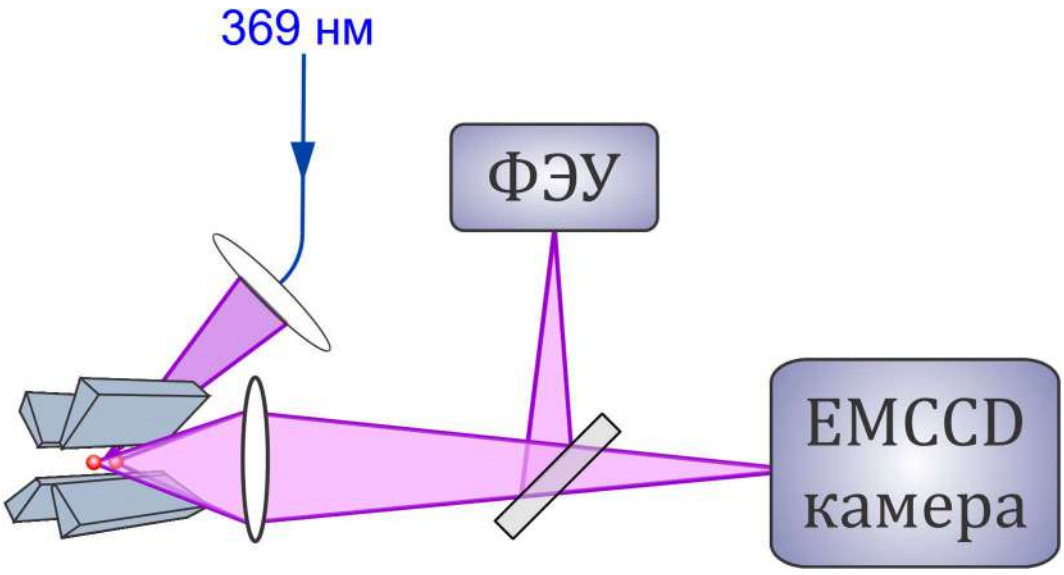
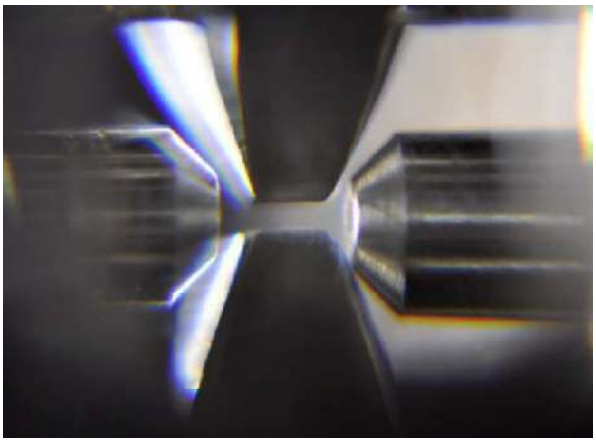


Рис. 2.10 Схема считывания состояния кудитов. Излучение от флюоресценции обоих ионов собирается линзой и фокусируется в одном канале фотоэлектронного умножителя или на EMCCD камере в зависимости от положения подвижного зеркала.

считывания – 7: вариант а и 6 возможных случаев варианта б (количество различных π-импульсов), что даёт 14 уравнений. Равенство суммы всех населённостей единице даёт 15-е уравнение. Для решения системы уравнений с 16 неизвестными требуется ещё одно линейно независимое уравнение, которое можно получить, если провести считывание с предварительным воздействием разных π-импульсов на обоих ионах, например, возбуждение переходов $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ на первом ионе и $|0\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ на втором ионе. Вычисление, например, p(2) и приравнивание этого значения соответствующей населённости даёт 16-е уравнение. Таким образом, решение полученной системы уравнений даст значения населённостей всех базисных состояний.

Заметим, что приведённый метод считывания может приводить к ошибке, т.к. при распаде $^2P_{1/2}|F=1\rangle \rightarrow {}^2D_{3/2}|F=2\rangle$ ион оказывается в темном состоянии (не взаимодействующим ни с одним из оптических полей) – сигнал флюоресценции будет равен нулю. Это легко видеть, например, при получении сигнала флюоресценции с иона, находящемся в состоянии $|00\rangle$, – при каждом измерении сигнал флюоресценции должен быть максимальным. Можно показать [40], что возможно достижение достоверности считывания более 99% при разумных параметрах эксперимента, таких как время считывания, положения дискриминаторов.



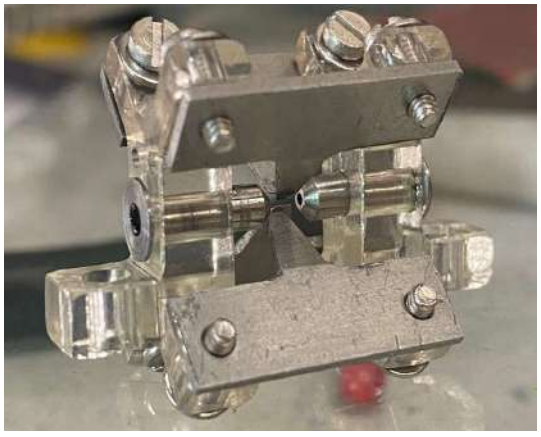


Рис. 2.11 Фотографии собранной ловушки Пауля.

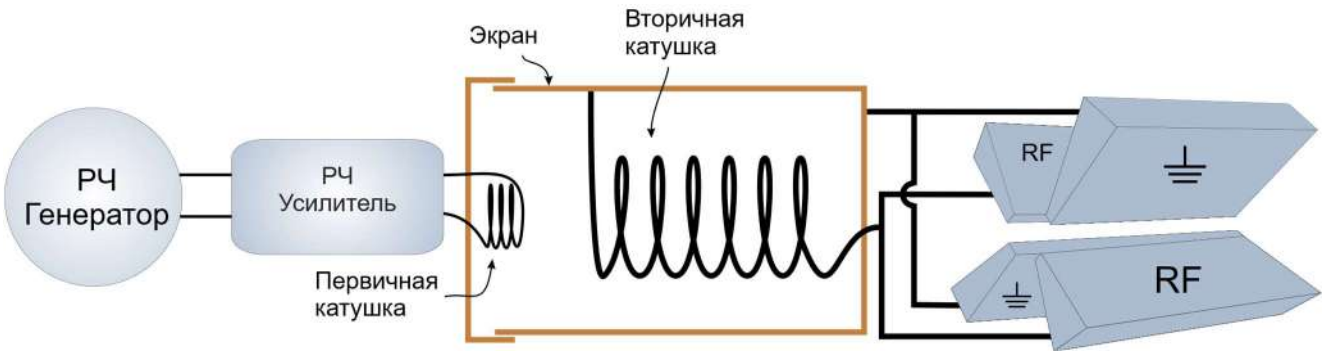


Рис. 2.11 Схема подключения резонансного трансформатора к электродам ловушки.

2.3 Экспериментальная установка

2.3.1 Ловушка Пауля и резонансный трансформатор

Для захвата ионов в данной работе использовалась линейная квадрупольная ловушка Пауля (Рис. 2.11), изготовленная и собранная в ФИАНе нашей группой. Ловушка состоит из двух пар электродов в виде лезвий, одна из которых заземлена, на другую подаётся радиочастотное напряжение с частотой 20 МГц. Вдоль оси ловушки также расположена пара цилиндрических электродов, создающих электрическое поле для аксиального удержания. Последние два электрода имеют сквозные отверстия для дополнительного оптического доступа вдоль оси. Все электроды изготовлены из молибдена, этот металл слабо

Рис. 2.12 Резонансный трансформатор в разобранном виде

окисляется на воздухе, что позволяет не покрывать электроды золотом. Кроме того, этот материал немагнитный, поэтому влияние паразитных магнитных полей, вызванных намагниченностью электродов, на захваченные ионы минимально.

Стабильное удержание иона требует высокой (более 100 В) амплитуды колебания радиочастотного поля, кроме того, высокая амплитуда обеспечивает более высокую частоту колебания иона, которая, в свою очередь, приводит к более глубокому охлаждение кудитов и более быстрым квантовым операциям. Стандартные лабораторные генераторы в большинстве случаев не позволяют напрямую получать амплитуду выше 10 В, поэтому для подачи напряжения на электроды ловушки используется так называемый резонансный трансформатор (helical resonator)[41] (Рис. 2.11, 2.12). Это устройство состоит из пары медных катушек – первичной, на которую подаётся напряжение с генератора (часто предварительно усиленное), и вторичной, подключённой непосредственно к электродам ловушки. Сдвигом катушек друг относительно можно добиться согласования импедансов и получить максимальную амплитуду колебаний напряжения на электродах ловушки. Обе катушки экранированы медным цилиндрическим экраном для уменьшения влияния окружающих полей на резонансный контур, а также для упрощения расчёта полей внутри

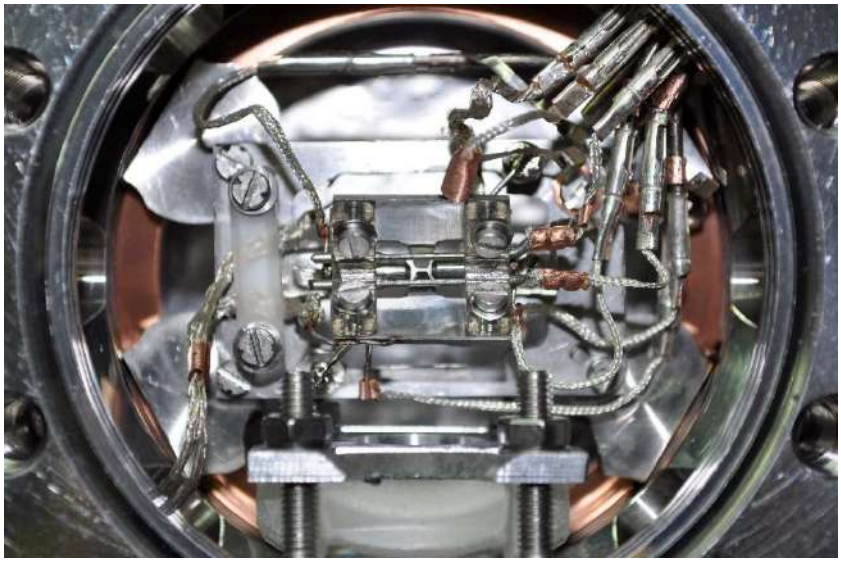


Рис. 2.13 Ловушка Пауля внутри вакуумной камеры

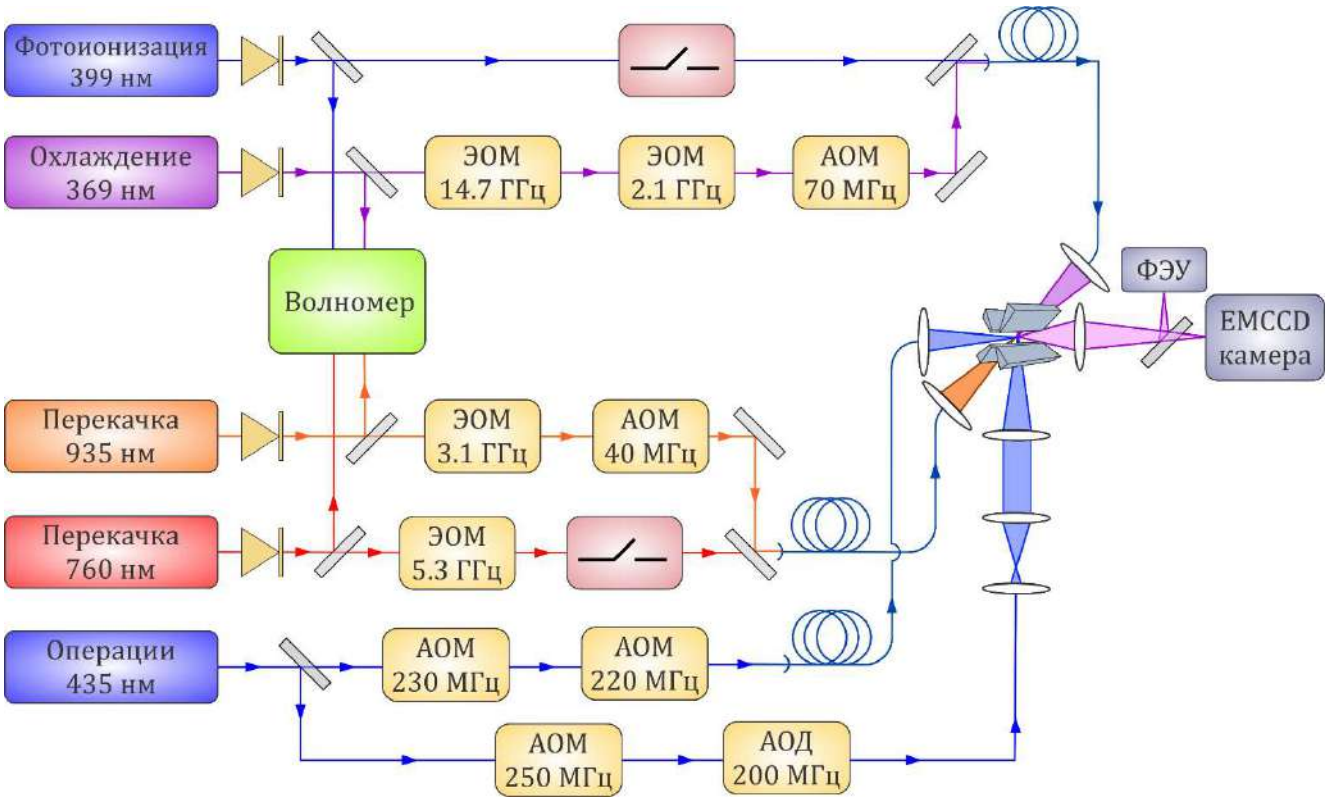


Рис. 2.14 Схема экспериментальной установки.

трансформатора. Собранный резонансный трасформатор имеет резонансную частоту 20 МГц и добротность около 800.

Ловушка Пауля помещена в вакуумную камеру (Рис. 2.13) с давлением менее 10^{-10} мбар, которое поддерживается при помощи ион-геттерного насоса. Откачивание камеры до сверхнизкого давления уменьшает вероятность столкновения ионов с фоновым газом и увеличивает время жизни иона в ловушке. В камере помимо ловушки также имеется атомная пушка с предварительно загруженной металлической стружкой иттербия. К атомной пушке подводятся электроды для нагрева иттербия электрическим током при загрузке ионов. Для оптического доступа и сбора сигнала флюоресценции ионов камера имеет несколько кварцевых окошек.

2.3.2 Лазерная система

С помощью оптической системы зеркал, поляризационных элементов, линз и оптических волокон лазерное излучение от нескольких диодных лазеров заведено и сфокусировано в центре ловушки (Рис. 2.14). Помимо пассивных оптических

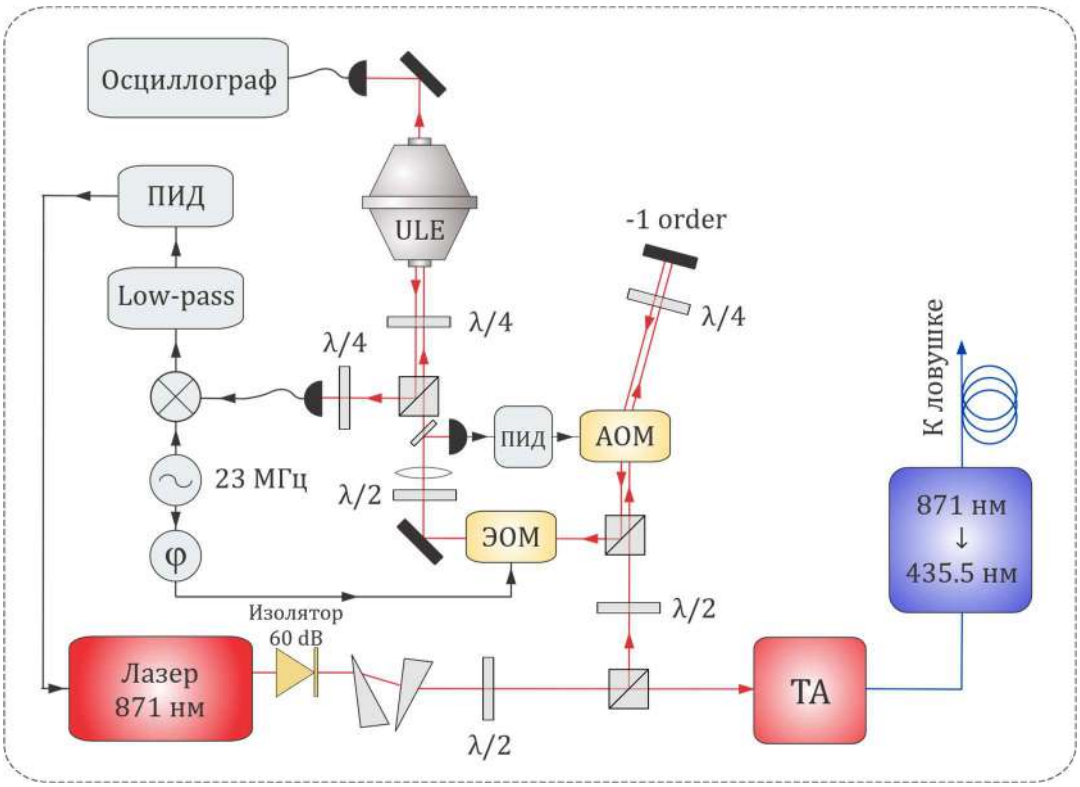


Рис. 2.14 Схема системы стабилизации частоты лазера на длине волны 871 нм.

элементов, оптическая плита содержит также акусто- и электрооптические модуляторы. Лазеры включают в себя охлаждающий лазер на длине волны 369.5 нм, перекачивающий лазер на длине волны 935.2 нм, перекачивающий лазер 760.1 нм, требуемый для перекачки населённости с $F_{7/2}$ обратно в цикл охлаждения. Излучение второго перекачивающего лазера требуется гораздо реже, так как заселение состояния $F_{7/2}$ происходит примерно раз в 15 минут из-за нечастого столкновения ионов с молекулами остаточного газа. Помимо указанных лазеров, используется также лазер фотоионизации на длине волны 398.9 нм, связывающий термы $^1S_0$ и $^1P_1$ в нейтральном иттербии, далее излучение на длине волны 369.5 нм переводит электрон из состояния $^1P_1$ в непрерывный спектр, ионизуя иттербий таким образом. При этом так как разность энергий состояний $^1S_0$ и $^1P_1$ зависит от массы атома, настройкой частоты лазера можно добиться ионизации только изотопа ^{171}Yb. Лазерный пучок фотоионизации направлен перпендикулярно потоку вылетающих атомов из пушки для подавления нежелательного доплеровского сдвига частоты. Часть излучения лазеров с

оптической плиты отводится к волномеру для измерения и стабилизации длины волны.

Лазер на длине волны 435.5 нм для глубокого охлаждения и проведения квантовых операций должен иметь стабильность порядка нескольких герц для эффективного возбуждения квадрупольного перехода с шириной 3 Гц. В данной работе для получения лазерного излучения с подходящими характеристиками был использован диодный лазер на длине волны 871 нм, имеющий в своей конструкции генератор второй гармоники для удвоения частоты. Конструкция лазера позволяет отделить часть излучения до удвоения и усиления рупорным усилителем для стабилизации по некоторой оптической опоре. В лабораторной установке такой оптической опорой является ультрастабильный резонатор Фабри-Перо с измеренной методом «ring-down» [42] резкостью 120000. Стабилизация осуществляется с помощью метода Паунда-Древера-Холла [43]. Тело резонатора изготовлено из ULE стекла со сверхнизким коэффициентом теплового расширения, при этом данное стекло имеет так называемую «нулевую точку» – температуру, при которой коэффициент линейного расширения обращается в ноль. При этом, так как частота продольной моды резонатора зависит линейно от флуктуаций длины резонатора, поддержание температуры резонатора, равной температуре нулевой точки, существенно повышает стабильность частоты лазера, стабилизированного по резонатору. Данная температура лежит в удобном для использования диапазоне 0-30 градусов Цельсия. Нулевая точка для резонатора в целом зависит также от материала используемых зеркал. В нашей установке использовались зеркала из плавленого кварца, что даёт нулевую точку резонатора, равную 10.8 ± 0.2 ℃. Схема системы стабилизации показана на рисунке 2.14. Для уменьшения влияния внешних акустических шумов на частоту лазера оптическая плита с системой стабилизации частоты лазера находится внутри короба из многослойного шумоизоляционного материала.

Лазерный пучок на длине волны 435.5 нм разделяется на два независимых пучка: индивидуальный – для проведения однокудитных операций, и глобальный

– для проведения операции перепутывания кудитов (Рис. 2.15). При заходе в ловушку пучки перпендикулярны друг другу: глобальный пучок направлен вдоль оси ловушки и воздействует на оба иона, индивидуальный пучок направлен перпендикулярно оси ловушки и воздействует на первый или второй ион в зависимости от частоты сигнала, подаваемого на акустооптический дефлектор. Так как дефлектор сдвигает частоту пучка примерно на 600 КГц при переходе между ионами, частота сигнала, подаваемого на АОМ, также зависит от иона. Индивидуальный пучок расширяется с помощью телескопа, а затем фокусируется с помощью асферической линзы, расположенной внутри вакуумной камеры и разрешающей ионы, находящиеся на расстоянии около 5 мкм.

2.3.3 Система считывания состояний и контроля магнитного поля

Вакуумная камера окружена тремя парами катушек (Рис. 2.16) в конфигурации Гельмгольца на расстоянии около 10 см от центра ловушки. Пары катушек подключены к трём независимым прецизионным источникам тока, позволяющим устанавливать ток в катушках в диапазоне от -3 до +3 А. С помощью этих катушек возможно создавать магнитное поле величиной от 0 до 10 Гс в месте

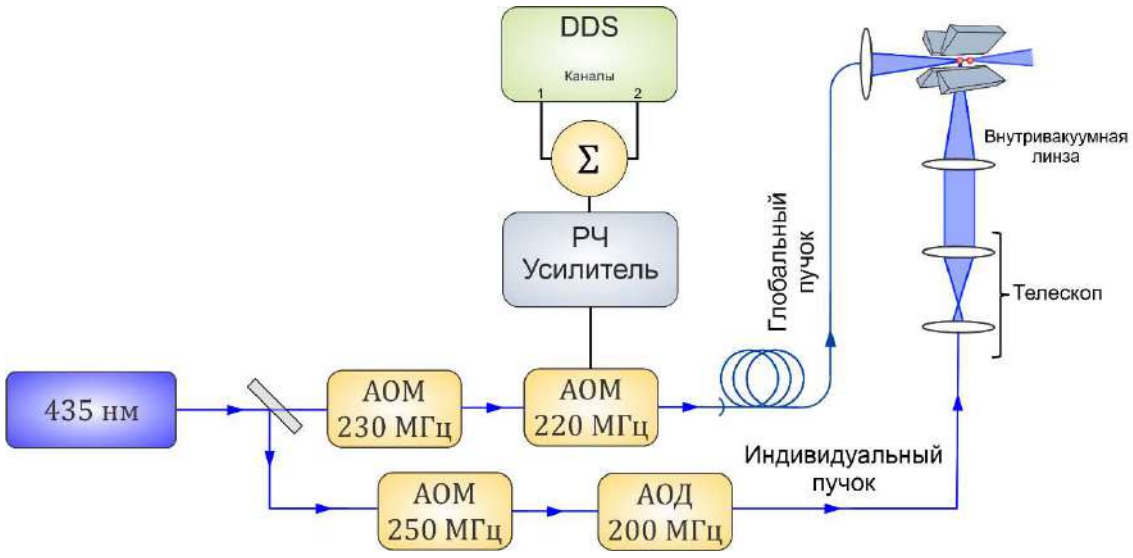


Рис. 2.15 Схема системы адресации кудитов. Для создания бихроматического излучения для проведения гейта Мёльмера-Соренсена на АОМ, сдвигающий частоту глобального пучка, подаётся сумма синусоид с различными частотами. За счёт использования АОДа и АОМа осуществляется контроль частоты и положения индивидуального пучка.

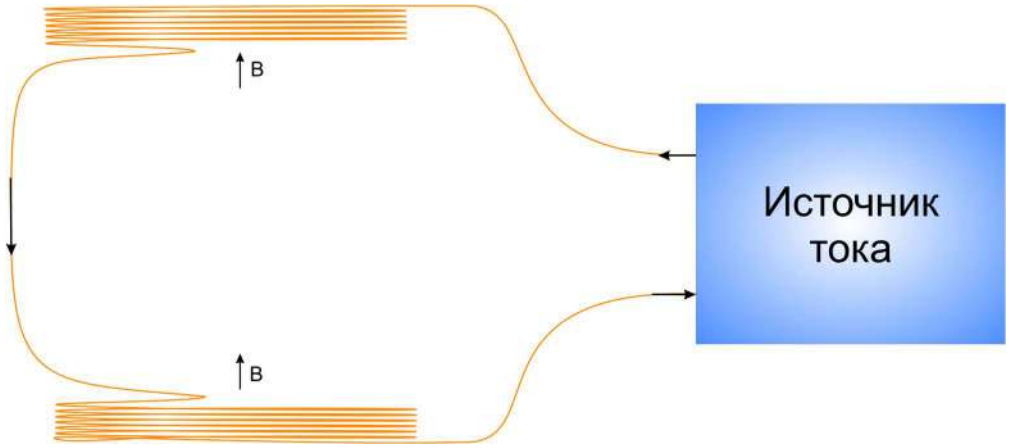


Рис. 2.16 Схема создания магнитного поля. Пара катушек в конфигурации Гельмгольца подключена к прецизионному источнику тока.

локализации ионов в любом направлении.

Наличие магнитного поля необходимо для подавления эффекта когерентного пленения населённостей [44,45], который уменьшает сигнал флюоресценции и эффективность доплеровского охлаждения. Кроме того, магнитное поле задаёт энергии кудитных состояний. Величина поля при проведении экспериментов устанавливалась равной около 5 Гс, направление поля было выбрано так, чтобы время выполнения однокудитных операций $|00\rangle \rightarrow |10\rangle$, $|00\rangle \rightarrow |01\rangle$, $|00\rangle \rightarrow |11\rangle$ различалось не более, чем на 20% при одинаковой интенсивности излучения.

Излучение флюоресценции ионов фокусировалось с помощью асферической

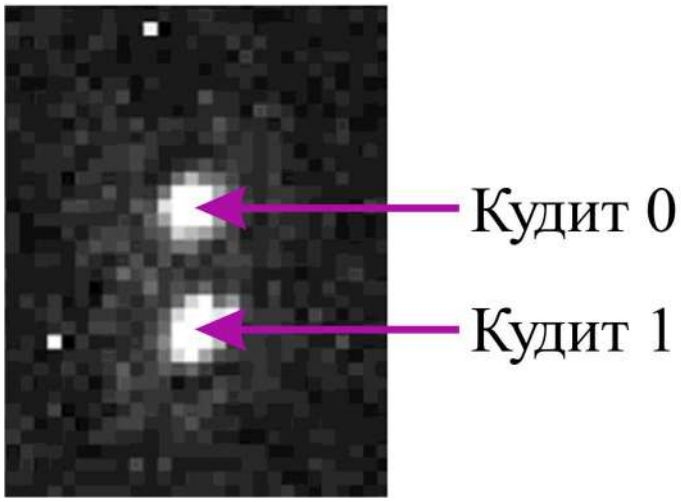


Рис. 2.17 Изображение двух захваченных ионов на камере.

линзы с антиотражающим покрытием для ультрафиолетовой части спектра диаметром 25 мм и фокусным расстоянием 32 мм. С помощью подвижного зеркала на сервоприводе излучение можно направлять на высокочувствительную EMCCD матрицу камеры для получения изображения ионов в реальном времени или на фотоэлектронный умножитель (ФЭУ) для измерения сигнала флюоресценции при считывании состояний ионов. Перед ФЭУ установлена диафрагма для уменьшения влияния паразитной засветки на достоверность считывания.

2.4 Демонстрация работы вычислителя

Для демонстрации работы квантового вычислителя в ловушку Пауля были захвачены 2 иона $^{171}Yb^{+}$. Для этого включалась атомная пушка, лазер фотоионизации 399 нм, охлаждающий лазер 369 нм, лазер перекачки 935 нм. Т.к. все лазерные пучки сфокусированы в центре ловушки, поток атомов ионизуется, и образовавшиеся ионы сразу же захватываются, а затем охлаждаются до температуры порядка доплеровского предела. Захваченный ион под воздействием охлаждающего лазера начинает излучать свет, флюоресцировать, причём направление вылета каждого отдельного фотона случайно, распределение направлений имеет дипольный профиль. Линза считывания проецирует это свечение на матрицу камеры. Поэтому успешный захват иона можно видеть на камере считывания как несколько ярких пикселей (Рис. 2.17). После захвата 2 ионов пучок фотоионизации перекрывался и выключалась атомная пушка. Затем происходила оптическая накачка ионов в состояние $^{2}S_{1/2}|F=0;m_F=0\rangle$ и глубокое охлаждение аксиальных мод колебаний ионов.

2.4.1 Проведение однокудитных операций

Перед проведением однокудитных операций акустооптические дефлекторы были откалиброваны и найдены значения частот сигналов, подаваемых на дефлекторы, соответствующие положениям индивидуального лазерного пучка 435.5 нм с максимальным значением интенсивности на каждом из ионов.

Акустооптический модулятор также был откалиброван и найдены значения частот сигналов, соответствующим положениям максимального возбуждения

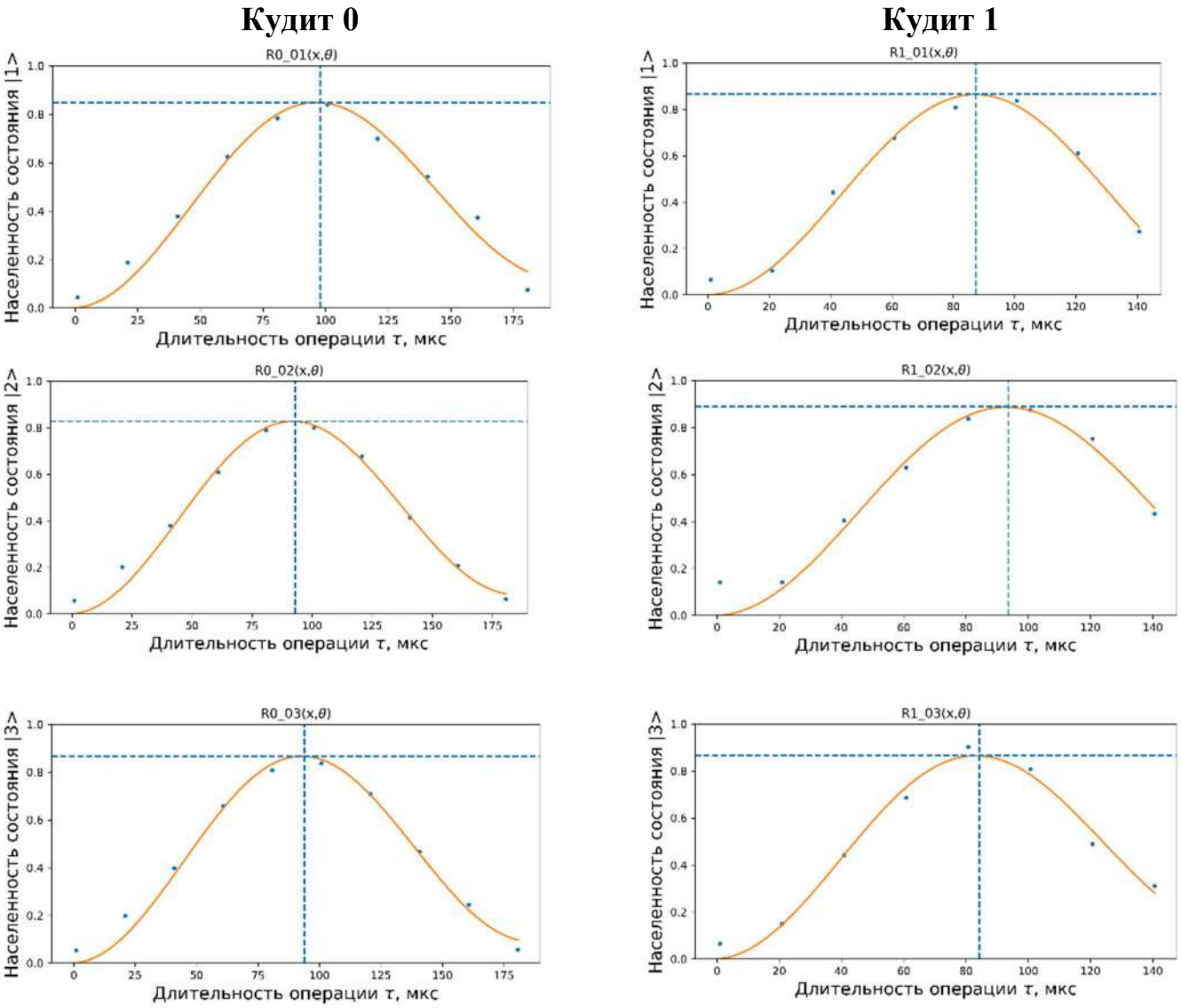


Рис. 2.18 Измеренные осцилляции Раби для двух кудитов между состояниями $|0\rangle$ и $|k\rangle$.

переходов ${}^2S_{1/2}|F=0;m_F=0\rangle \leftrightarrow {}^2D_{3/2}|F=2;m_F=0\rangle$, ${}^2S_{1/2}|F=0;m_F=0\rangle \leftrightarrow {}^2D_{3/2}|F=2;m_F=+1\rangle$, ${}^2S_{1/2}|F=0;m_F=0\rangle \leftrightarrow {}^2D_{3/2}|F=2;m_F=-1\rangle$, а также подобрана амплитуда сигнала, необходимая для получения длительности π-импульсов в диапазоне 80-100 мкс.

Для удобства обозначим кудитные состояния как

$$
\begin{aligned}
|0\rangle &\equiv {}^2S_{1/2}|F=0;m_F=0\rangle,\\
|1\rangle &\equiv {}^2D_{3/2}|F=2;m_F=0\rangle,\\
|2\rangle &\equiv {}^2D_{3/2}|F=2;m_F=-1\rangle,\\
|3\rangle &\equiv {}^2D_{3/2}|F=2;m_F=+1\rangle
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

и однокудитные операции, соответствующие возбуждению переходов $|0\rangle \leftrightarrow |k\rangle$ кудита номер i, как $R_{0k}^{i}\big(\phi,\theta(\tau)\big)$, где ϕ определяет ось вращения вектора-состояния и $\theta(\tau)$ – угол вращения, пропорциональный времени проведения однокудитной операции. Для оценки достоверности однокудитных операций была получена зависимость населённости кудитных состояний от времени (Рис. 2.18). Каждая точка на графиках представляет собой результат усреднения массива 50 значений, состоящих из нулей и единиц (где 1 или 0 соответствует сигналу флюоресценции меньше или больше некоторого выбранного дискриминатора d, соответственно), полученных при проведении последовательности «доплеровское охлаждение, инициализация состояния, глубокое охлаждение, операция $R_{0k}^{i}\big(\phi,\theta(\tau)\big)$, считывание». Положения максимума осцилляций Раби на графиках соответствуют операциям $R_{0k}^{i}(\phi,\pi)$, то есть π – импульсам. Населённость верхнего состояния $|k\rangle$ в этих точках даёт оценку на достоверность проведения однокудитных операций $R_{0k}^{i}(\phi,\pi)$. Зависимости населённостей от времени снимались 10 раз. Полученные средние значения достоверностей и стандартные отклонения приведены в таблице 3.

	$R_{01}^{i}(x,\pi)$	$R_{02}^{i}(x,\pi)$	$R_{03}^{i}(x,\pi)$
Кудит 0	84.8 $\pm$ 0.5 %	82.6 $\pm$ 1.0 %	86.6 $\pm$ 0.9 %
Кудит 1	86.5 $\pm$ 0.9 %	89 ± 2 %	86.5 $\pm$ 0.6 %

Табл. 3 Достоверности однокудитных операций, полученные в эксперименте.

Так как лазерный пучок для индивидуальной адресации направлен перпендикулярно цепочке ионов, коэффициент Лэмба-Дике для аксиальных мод равен нулю, и частоты Раби для кудитных переходов зависят только от номера

колебательного уровня радиальных мод. Следовательно, достоверность однокудитных операций определяется температурой охлаждения радиальных мод. Используемая экспериментальная установка, однако, не позволяет реализовать глубокое охлаждение радиальных мод, так как требует наличия глобального лазерного пучка 435.5 нм, перпендикулярного ионной цепочке. Поэтому в описанном эксперименте перед проведением однокудитных операций радиальные моды колебаний имеют температуру порядка доплеровского предела. Данный фактор является доминирующим ограничением достоверности в проведённых экспериментах.

2.4.2 Проведение двухкубитной операции

Для проведения двухкудитной операции (гейта Мёльмера-Соренсена) был использован переход $^2S_{1/2}|F=0;m_F=0\rangle \leftrightarrow {}^2D_{3/2}|F=2;m_F=0\rangle$ и колебательный резонанс на частоте антисимметричной аксиальной моды. Частота данной моды в нашей экспериментальной установке равна 809 КГц, что в $\sqrt{3}$ раз больше частоты моды колебания центра масс, поэтому использование этого

Рис. 2.19 Динамика населённостей при воздействии бихроматического поля на пару ионов. При оптимальной длительности воздействия τ_0 населённости состояний $|01\rangle$ и $|10\rangle$ принимают минимальное значение (в идеальном случае обращаются в 0).

колебательного резонанса уменьшает эффект нерезонансного возбуждения перехода на несущей частоте.

Также примечательно, что эффективность возбуждения антисимметричной моды зависит от полуразности напряжённостей нескомпенсированных электрических полей, действующих на ионы, тогда как возбуждение симметричной моды определяется полусуммой. Поэтому данная мода имеет меньшую чувствительность к нагреву, что уменьшает влияние аномального нагрева ионов на достоверность операции. Для создания бихроматического поля вместо монохроматического сигнала на акустооптический модулятор подавалась сумма двух синусоид с такими частотами, что оптическое поле в первом порядке дифракции имеет спектральные компоненты, близкие к резонансным с «красным» и «синим» колебательными резонансами. Формулы (4.14) задают оптимальную отстройку от резонанса μ и время τ_0 для проведения успешного гейта Мёльмера-Соренсена.

Так как пучки с «красной» и «синей» отстройкой получены с помощью одного АОМа, их геометрические пути с большой точностью совпадают, и выражение $\phi_M^{(1)} - \phi_M^{(2)} = \Delta k \Delta x$ (где $\Delta x -$ расстояние между ионами порядка 5 мкм, $\Delta k = \frac{\Delta\omega}{c} \sim 10^{-2}\text{м}^{-1}$) представляет собой маленькую величину. Поэтому можно пренебречь косинусом в выражениях (4.14) и записать оптимальные

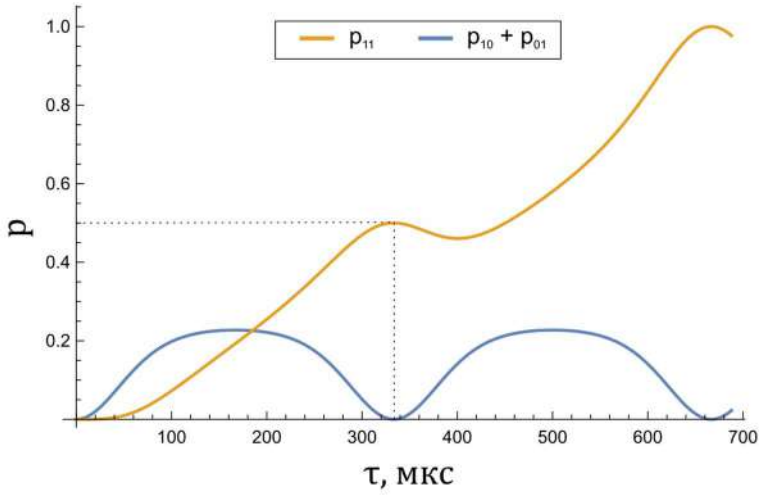


Рис. 2.20 Динамика населённостей при проведении гейта Мёльмера-Соренсена в идеальном случае.

условия как $\mu = 2\eta\Omega, \tau_0 = \frac{\pi}{\eta\Omega}$. При произвольном времени воздействия τ бихроматического поля обозначим такую операцию как $MS_{01}^{01}(\tau)$.

Для определения оптимальной длительности гейта была измерена населённость состояний $|11\rangle$, а также сумма населённостей состояний $|01\rangle$ и $|10\rangle$ в зависимости от времени проведения операции $MS_{01}^{01}(\tau)$ (Рис. 2.19). Так как в используемой экспериментальной установке задействовался один канал фотоэлектронного умножителя, сумма населённостей состояний $|01\rangle$ и $|10\rangle$ соответствовала доле случаев, когда величина сигнала флюоресценции находилась между значений некоторых выбранных дискриминаторов d1 и d2 (населённость $|11\rangle$, в свою очередь, соответствует величине сигнала меньше значения каждого из дискриминаторов). В идеальном случае населённость состояний $|01\rangle$ и $|10\rangle$ после проведения гейта Мёльмера-Соренсена обращается в 0 (Рис. 2.20), поэтому на графике зависимости $P_{01} + P_{10}$ от τ оптимальное время τ_0 соответствует первому минимуму.

Оцененное значение τ_0 составляет 314 мкс. Зависимость населённостей от

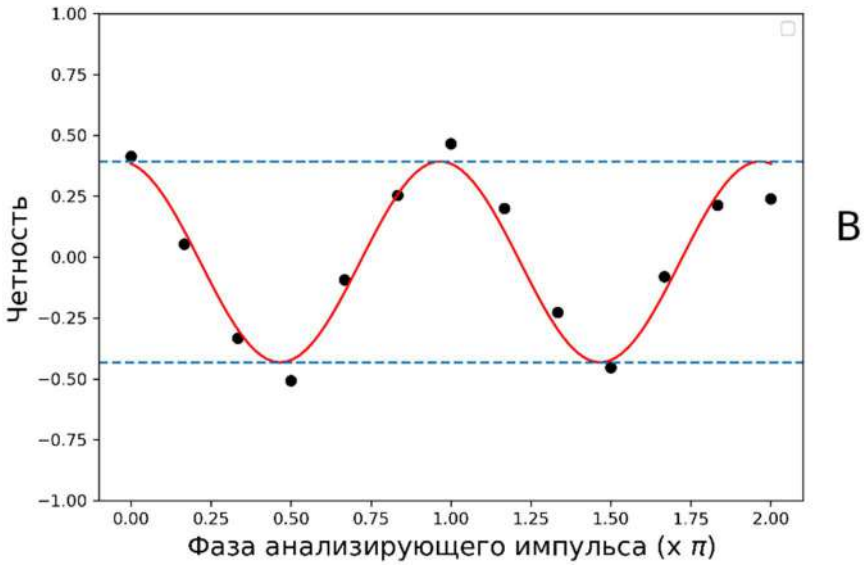


Рис. 2.21 Зависимость чётности состояний ионов от фазы анализирующего импульса после проведения гейта с оптимальными параметрами. В случае идеальной двухкубитной операции размах осцилляций чётности составляет 2.

времени при проведении гейта была измерена 10 раз, и найдено среднее значение населённости $P_{01} + P_{10}$ в момент времени τ_0 и стандартное отклонение: $A = 0.11 \pm 0.07$. Далее при фиксированной длительности гейта, равной τ_0, измерялась зависимость чётности состояния от фазы анализирующего $R_{01}^{01}(\phi, \pi/2)$ импульса (Рис. 2.21). Зависимость была просканирована 10 раз, был получен средний полученный размах осцилляций и стандартное отклонение: $B = 0.83 \pm 0.06$. Из формул (4.16) и (4.21) следует, что достоверность операции можно выразить как $F = \frac{1-A}{2} + \frac{B}{4}$. Подстановка полученных значений A, B и их стандартных отклонений даёт $F = (65 \pm 4)$ %.

2.4.3 Анализ результата эксперимента

Был произведён анализ полученного результата. Замечено, что получаемая достоверность зависит от параметров стабилизации частоты лазера. Так как параметры стабилизации частоты лазера по резонатору определяют спектр шумов лазера, можно предположить, что шумы лазера вносят наибольший вклад в

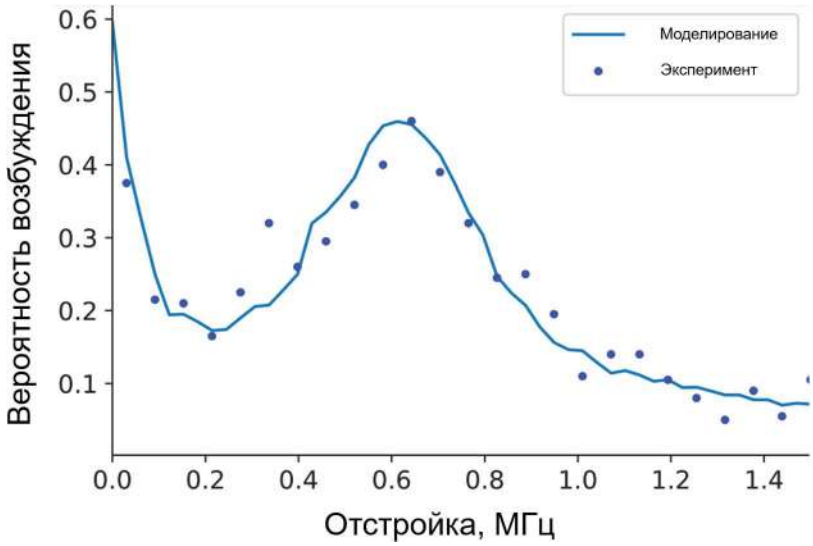


Рис. 2.22 Зависимость вероятности возбуждения перехода $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ от отстройки лазера от резонанса. Частота Раби составляет $\Omega = 2\pi \times 45$ КГц, длительность импульса $\tau_p = 400$ мкс. Так как при отстройках, превышающих частоту Раби, возбуждение в большей степени определяется фазовыми шумами лазера, аппроксимация экспериментальных данных численной моделью позволяет получить информацию о фазовых шумах лазерного источника.

ошибку. Для подтверждения этой гипотезы было выполнено численное моделирование эксперимента по проведению гейта Мёльмера-Соренсена с учётом фазовых шумов лазера [46].

Для получения информации о спектральной плотности шумов в эксперименте была проведена спектроскопия перехода $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ лазерным импульсом длительностью, превышающей длительность пи-импульса. При отстройках от перехода, превышающих частоту Раби, возбуждение в большей степени определяется шумом фазы лазера, поэтому населённость состояния $|1\rangle$ при больших значениях отстройки от перехода даёт информацию о спектре шумов фазы лазера. По результатам измерений был получен массив точек (Рис. 2.22), соответствующих населённости возбуждённого состояния при различных отстройках лазерного импульса от перехода. Из графика видно, что спектральная плотность фазовых шумов зависит от частоты немонотонно и имеет максимум вблизи 600 КГц.

После этого в программе, реализующей численное моделирование описанного процесса, генерировались кривые зависимости населённости состояния $|1\rangle$ в зависимости от отстройки при различных параметрах спектральной плотности фазовых шумов возбуждаемого лазера. Были выбраны оптимальные параметры спектральной плотности шумов такие, что экспериментальные точки аппроксимируются зависимостью с наилучшей точностью (Рис. 2.22). Полученная спектральная плотность шумов затем была использована в численном моделировании эксперимента по проведению гейта Мёльмера-Соренсена. Полученная достоверность составила около 70%, что близко к значению 65%, измеренному при проведении эксперимента. Таким образом, возникающая при проведении эксперимента ошибка обусловлена техническими причинами и может быть устранена в дальнейшем с использованием лазерного источника с более низким уровнем шумов.

Основные результаты главы 2

1. Впервые предложено использование подуровней терма $^2D_{3/2}$ в ионах $^{171}Yb^+$ для создания кудитов.
2. Впервые продемонстрирован универсальный набор кудитных квантовых операций на паре захваченных в ловушку ионах иттербия. Получены достоверности однокудитных операций выше 82% и достоверность двухкудитной операции 65%.
3. Показано, что основной вклад в ошибку двухкудитной операции вносят фазовые шумы лазерного источника.

Основные результаты данной главы опубликованы в [47].

Глава 3. Неадиабатические квантовые операции

Одним из способов масштабирования ионного квантового вычислителя является использование неадиабатических квантовых операций, позволяющих преодолеть проблему разрешения отдельных колебательных мод в длинных ионных кристаллах. Далее для описания работы неадиабатических квантовых вентилей потребуется понятие когерентного состояния колебаний, которое является «наиболее классическим» описанием квантового поведения осциллятора.

3.1 Когерентные состояния

Когерентное состояние задаётся комплексным числом α и является собственным состоянием оператора уничтожения:

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \tag{3.1}$$

Т.к. оператор a не является эрмитовым, α – не наблюдаемая величина. Однако действительная и мнимая часть являются, соответственно, операторами координаты и импульса для состояния $|\alpha\rangle$:

$$\frac{1}{2x_0}\langle\alpha|\hat{x}|\alpha\rangle = \alpha_R, \tag{3.2}$$

$$\frac{1}{2p_0}\langle\alpha|\hat{p}|\alpha\rangle = \alpha_I \tag{3.3}$$

где $x_0 = \sqrt{\hbar/2m\omega}$ и $p_0 = \sqrt{m\omega\hbar/2}$ и ω – частота осциллятора. Выражение (3.1) также позволяет найти вид когерентного состояния в базисе чисел заполнения, т.е. числа фононов:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \tag{3.4}$$

При этом если применить оператор свободной эволюции $e^{-i\omega_{trap}ta^+a}$ к выражению (3.4), получим

$$|\alpha\rangle \to |\alpha e^{-i\omega t}\rangle. \tag{3.5}$$

Когерентное состояние $|\alpha\rangle$ можно преобразовать в новое когерентное состояние $|\alpha+\beta\rangle$ действием оператора сдвига

$$D[\beta] = e^{\beta a^+ - \beta^* a}, \tag{3.6}$$

при этом

$$D[\alpha]|0\rangle = |\alpha\rangle. \tag{3.7}$$

Используя формулу Бейкера – Кэмпбелла – Хаусдорфа

$$e^X e^Y = e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]}, \tag{3.8}$$

и коммутатор $[a, a^+] = 1$, получим для произведения двух операторов сдвига следующее выражение:

$$D[\alpha]D[\beta] = e^{(\alpha\,\beta^* - \alpha^*\beta)/2} D[\alpha + \beta]. \tag{3.9}$$

Тогда используя выражение (3.7), получим действие оператора сдвига на произвольное когерентное состояние $|\alpha\rangle$

$$D[\beta]|\alpha\rangle = D[\beta]D[\alpha]|0\rangle = e^{(\beta\,\alpha^* - \beta^*\alpha)/2}|\alpha + \beta\rangle. \tag{3.10}$$

Таким образом, действие оператора сдвига на когерентное состояние приводит так же к появлению дополнительной фазы. Например, для действительного p

$$D[ip]|\alpha\rangle = e^{ipIm(\alpha)}|\alpha + ip\rangle. \tag{3.11}$$

Стоит заметить, что базис когерентных состояний является переполненным, при этом

$$\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = 1, \tag{3.12}$$

где интегрирование ведётся по всей комплексной плоскости. Скалярное произведение двух когерентных состояний задаётся выражением

$$\langle\alpha|\beta\rangle = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2\alpha^*\beta)}. \tag{3.13}$$

3.2 Спин-зависимые толчки

В главе 1 при написании гамильтониана взаимодействия иона с полем неявно полагалось, что интенсивность излучения медленно меняется за период колебания иона, и был выполнен переход к приближению вращающейся волны с частотой колебания иона. В случае быстро меняющейся амплитуды необходимо также учитывать соотношение частот изменения амплитуды поля и секулярного

колебания иона, и динамика взаимодействия иона с полем становится гораздо более сложной. В другом предельном случае, когда частота изменения амплитуды много больше частоты колебания иона (но всё ещё много меньше частоты перехода), взаимодействие может быть описано как мгновенное приобретение или потеря ионом импульса [48]. Гамильтониан взаимодействия в этом приближении можно записать в виде

$$\widehat{H} = \frac{\Omega(t)}{2}\left[\hat{\sigma}_+ e^{i\eta(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)} + \hat{\sigma}_- e^{-i\eta(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)}\right]. \tag{3.14}$$

В случае мгновенных импульсов $\Omega(t) = \theta\delta(t - t_0)$, где θ-площадь импульса, поэтому гамильтониан коммутирует сам с собой в разные моменты времени. Следовательно, оператор эволюции запишется как матричная экспонента от гамильтониана:

$$\widehat{U} = \exp\left(-i\int_0^\tau \widehat{H}\,dt\right). \tag{3.15}$$

В случае π-импульса, т.е. при $\theta = \pi$ выполним интегрирование дельта-функции и разложим матричную экспоненту в ряд:

$$\begin{aligned}\widehat{U}_1(\eta) = 1 - \frac{i\pi}{2}\left[\hat{\sigma}_+ e^{i\eta(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)} + \hat{\sigma}_- e^{-i\eta(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)}\right] + \frac{\left(-\frac{i\pi}{2}\right)^2}{2}\left[\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+\right] \\ + \frac{\left(-\frac{i\pi}{2}\right)^3}{6}\left[\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+ e^{i\eta(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)} + \hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- e^{-i\eta(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)}\right] + \cdots \\ = -i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\left[\hat{\sigma}_+ e^{i\eta(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)} + \hat{\sigma}_- e^{-i\ (\hat{a}+\hat{a}^\dagger)}\right] + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) I \\ = -i\left[\hat{\sigma}_+ e^{i\eta(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)} + \hat{\sigma}_- e^{-i\eta(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)}\right].\end{aligned} \tag{3.16}$$

Легко видеть, что эволюция состояния иона в таком случае представляет собой одновременное изменение электронного состояния и колебательного состояния, причём приобретает ли ион импульс или отдаёт, зависит от начального электронного состояния, поэтому импульс называют спин-зависимым толчком (СЗТ, SDK, spin-dependent kick).

3.3 Неадиабатическое запутывание

Использование коротких импульсов для перепутывания ионов впервые было предложено командой учёных Жуаном Гарсия-Риполь, Игнатио Цираком и Петером Золлером в 2003 году. Неадиабатические гейты обладают значительным преимуществом перед адиабатическими в контексте масштабируемого квантового вычислителя. С увеличением числа ионов, усложняющим спектр колебательных частот, разрешение отдельных колебательных мод при реализации адиабатической операции перепутывания становится все более сложной задачей. В случае неадиабатической операции ширина спектра используемых импульсов много больше величины частоты любой из колебательных мод, поэтому происходит возбуждение всех колебательных мод ионов, и разрешение отдельных компонент колебательного спектра не требуется. Кроме того, скорость операции существенно возрастает, что позволяет произвести больше операций за время когерентности кубитов.

Суть метода заключается в воздействии на ионы серии коротких импульсов, приходящих с противоположных направлений. Подбором количества импульсов и моментов прихода можно обеспечить независимость конечного колебательного

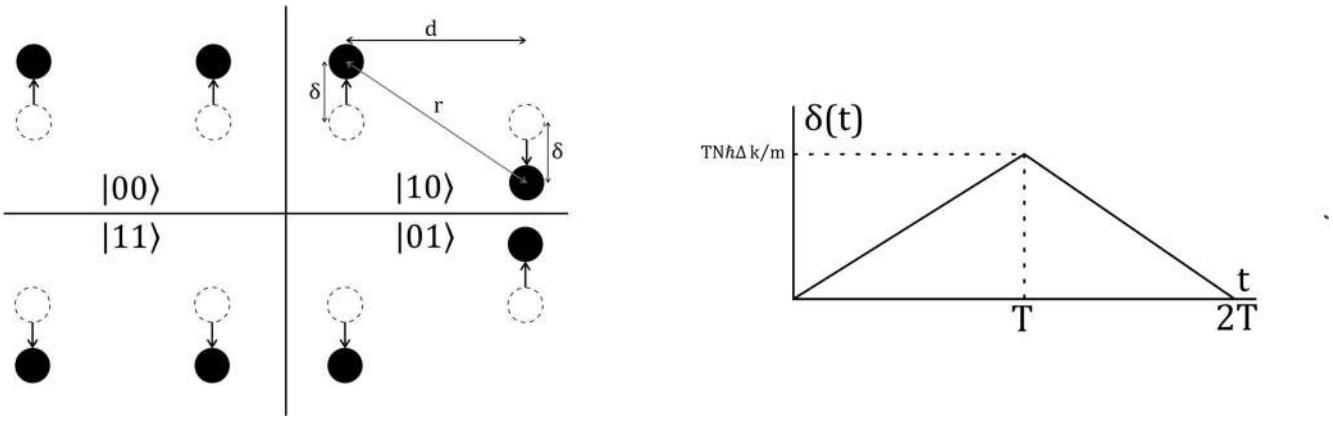


Рис. 3.1 Спин-зависимый толчок, воздействующий на пару ионов, создаёт 4 возможные конфигурации в зависимости от состояний ионов (слева). Пунктирной линией показаны начальные положения ионов. Стрелкой показаны смещения ионов в результате толчков. Справа изображён график зависимости смещения от времени для простой последовательности СЗТ. Время воздействия полагается малым по сравнению с периодом колебания ионов, поэтому движение ионов можно считать свободным.

состояния от начального. При этом так как приобретаемый импульс зависит от спина, различные спиновые конфигурации пары ионов после проведения операции приобретают разные фазовые множители. Рассмотрим на примере простой последовательности импульсов работу данного гейта. Положим, что в момент времени 0 ионы подвергаются серии спин-зависимых толчков, изменяющих импульс на $\pm N\hbar\Delta k$, в некоторый момент времени T:$\mp 2N\hbar\Delta k$, и в момент времени $2T$: $\pm N\hbar\Delta k$. Если общая длительность последовательности такова, что $\omega \cdot 2T \ll 1$, где ω – секулярная частота колебания ионов вдоль прямой, соединяющей ионы, то можно пренебречь свободной эволюцией колебательного состояния и представить движение ионов как движение свободных частиц. Положим, что в начальный момент времени ионы покоятся. Тогда после воздействия первой серии импульсов ионы движутся с постоянной скоростью $N\hbar\Delta k/m$ до тех пор, пока вторая серия импульсов не изменит знак скорости. Затем последняя серия импульсов останавливает движение ионов около положения равновесия. Как видно из рисунка 3.1, энергия взаимодействия ионов в состояниях $|00\rangle$ и $|11\rangle$ не меняется за время проведения операции. Однако в состояниях $|01\rangle$ и $|10\rangle$ изменяется расстояние между ионами, равное в произвольный момент времени $\sqrt{d^2 + 4\delta(t)^2}$, что приводит к появлению разницы энергий между двумя спиновыми конфигурациями:

$$\Delta E(t) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\sqrt{d^2 + 4\delta(t)^2}}\right) \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2\delta(t)^2}{d^3}\right), \tag{3.17}$$

где d – расстояние между ионами в положении равновесия, $\delta(t)$ – смещение ионов от положения равновесия во время гейта. В таком случае набирается разность фаз, равная

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \frac{1}{\hbar}\int_0^{2T} \Delta E(t)dt = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{2}{d^3}\int_0^{2T}\delta(t)^2 dt \\ &= \frac{4(e^2/4\pi\epsilon_0)\hbar N^2\Delta k^2 T^3}{3d^3m^2} = \frac{2\hbar\omega^2 N^2\Delta k^2 T^3}{3m},\end{aligned} \tag{3.18}$$

где расстояние между ионами выражено через секулярную частоту.

Таким образом, в результате проведения такой операции ионы возвращаются к первоначальному колебательному состоянию, при этом происходит набег дополнительной фазы для состояний $|01\rangle$ и $|10\rangle$ относительно состояний $|00\rangle$ и $|11\rangle$, то есть данный гейт является фазовым. Стоит отметить, что фаза набирается исключительно за счёт воздействия внешних сил, и свободные колебания ионов не приводят к набору фазы. Очевидно, что действие серии импульсов не является мгновенным, и свободная эволюция колебательного состояния ограничивает достоверность операции. Далее приведём более строгое квантово-механическое описание работы данного фазового гейта.

Для серии из z пар последовательных импульсов (с малым периодом повторений), приходящих с противоположных направлений, имеем оператор эволюции:

$$\begin{aligned}\widehat{U}_2 = \widehat{U}_1(\eta)\widehat{U}_1(-\eta) &= -\left[\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- e^{2i\eta(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)} + \hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+ e^{-2i\eta(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)}\right] \\ &= -e^{-2iz\eta\hat{\sigma}_z(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)}.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Знак z соответствует направлению первого импульса в паре. Данная формула естественным образом обобщается на взаимодействие с парой ионов, присутствие дополнительных ионов в 3D конфигурации и, соответственно, дополнительных мод коллективных колебаний:

$$\begin{aligned}\widehat{U}_{kick} &= \prod_{p=1}^{3L} e^{-2iz\left(\vec{b}_1^{(p)}\hat{\sigma}_1^z + \vec{b}_2^{(p)}\hat{\sigma}_2^z\right)\vec{\eta}_p(\hat{a}_p+\hat{a}_p^\dagger)} \\ &= \prod_{p=1}^{3L} \widehat{D}_p(-2iz(\vec{b}_1^{(p)}\hat{\sigma}_1^z + \vec{b}_2^{(p)}\hat{\sigma}_2^z)\,\vec{\eta}_p),\end{aligned} \tag{3.20}$$

где $\vec{b}_1^{(p)}, \vec{b}_2^{(p)}$ – вклады моды с номером p в колебание первого и второго иона пары, соответственно, $\vec{\eta}_p = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_p}}\begin{pmatrix}k_x\\k_y\\k_z\end{pmatrix}$ – параметр Лэмба-Дике, L – число ионов. Далее следующая серия из z_{k+1} пар импульсов приходит в некоторый момент времени t_{k+1}, при этом фаза когерентного состояния p изменяется на угол

$\omega_p(t_{k+1} - t_k)$. Для последовательности из N серий импульсов, чередующихся со свободной эволюцией колебательных мод, оператор эволюции запишется в виде:

$$\begin{gathered}\widehat{U}_{gate} = \prod_{k=1}^{N} \prod_{p=1}^{2L} \widehat{D}_p\left(-i\hat{c}_{pk}\right) e^{-i\omega_p \delta t_k \hat{a}_p^{\dagger} \hat{a}_p}, \\ \hat{c}_{pk} = 2z_k \left(\vec{b}_1^{(p)} \hat{\sigma}_1^z + \vec{b}_2^{(p)} \hat{\sigma}_2^z\right) \vec{\eta}_p.\end{gathered} \tag{3.21}$$

Можно показать, что некоторая когерентная мода $|\alpha\rangle$ после проведения гейта перейдёт в $e^{i\xi_p}|\tilde{\alpha}\rangle$, где

$$\begin{gathered}\xi_p = \sum_{m=2}^{N} \sum_{k=1}^{m-1} \left[\hat{c}_{pm}\hat{c}_{pk}\, sin\left(\omega_p(t_m - t_k)\right)\right] - Re[\alpha \sum_{k=1}^{N} \hat{c}_{pk} e^{-i\omega_p t_k}] \,, \\ \tilde{\alpha} = \alpha e^{-i\omega_p T_G} - i \sum_{k=1}^{N} c_{pk} e^{i\omega_p (t_k - T_G)}.\end{gathered} \tag{3.22}$$

При выполнении условия

$$\hat{C}_p = -i \sum_{k=1}^{N} \hat{c}_{pk} e^{i\omega_p t_k} = 0 \tag{3.23}$$

когерентное состояние становится равным $\left|\alpha e^{-i\omega_p T_G}\right\rangle$, где $T_G -$ длительность гейта, то есть таким же, каким оно было бы в отсутствии взаимодействия. Так как

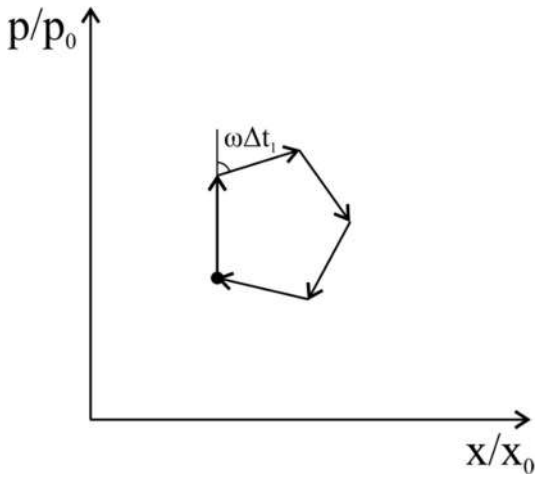


Рис. 3.1 Эволюция когерентного колебательного состояния некоторой нормальной моды на фазовой плоскости во вращающейся системе координат под действием серии СЗТ. Жирной точкой отмечено начальное когерентное состояние.

любое колебательное состояние может быть разложено по переполненному базису когерентных состояний, при выполнении условия (3.23) любое колебательное состояние вернётся в исходное. Для описания действия серии импульсов на фазовой плоскости удобно перейти во вращающуюся с частотой когерентной моды систему координат. Каждая из N серий импульсов может быть представлена, как вектор смещения, при этом каждый следующий направлен под углом $\omega_p \delta t$ к предыдущему (Рис. 3.1). Замыканию образующейся на фазовой плоскости кривой соответствует ситуация, описываемая уравнением (3.23). При этом для идеального гейта замыкание должно произойти для всех мод коллективных колебаний ионов. Так как кривая заметает некоторую площадь, в результате проведения гейта состояние приобретает некоторую фазу ξ_p. Если выполнить суммирование по всем когерентным модам, полная фаза становится равной

$$\Phi = \sum_p^{3L} \xi_p = 8 \sum_{p=1}^{3L} (\vec{\eta}_p \vec{b}_1^{(p)})(\vec{\eta}_p \vec{b}_2^{(p)}) \sigma_1^z \sigma_2^z \sum_{m=2}^{N} \sum_{k=1}^{m-1} z_m z_k sin\,(\omega_p (t_m - t_k)). \qquad (3.24)$$

Отсюда видно, что знак приобретаемой фазы зависит от чётности состояний ионов $\sigma_1^z \sigma_2^z$. Таблица истинности описанного фазового гейта может быть записана как

$$\begin{aligned} |00\rangle &\rightarrow e^{i\Phi}|00\rangle \\ |01\rangle &\rightarrow e^{-i\Phi}|01\rangle \\ |10\rangle &\rightarrow e^{-i\Phi}|10\rangle \\ |11\rangle &\rightarrow e^{i\Phi}|11\rangle. \end{aligned} \qquad (3.25)$$

Для максимальной запутанности обычно выбирают $\Phi = \frac{\pi}{4}$. Начальное незапутанное состояние $|\psi_0\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{1}{2}|11\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right)$ при проведении гейта с идеальными параметрами, такими, что

$$\sum_{k=1}^{N} z_k e^{i\omega_p t_k} = 0,$$
$$\Phi = \frac{\pi}{4}, \tag{3.26}$$

перейдёт в состояние $|\psi_{id}\rangle = \frac{1}{2}i|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{1}{2}i|11\rangle$.

Покажем, что состояние $\frac{1}{2}ie^{i\gamma}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{1}{2}ie^{-i\gamma}|11\rangle$ является максимально перепутанным, в том числе и $|\psi_{id}\rangle$ при $\gamma = 0$. Для этого рассмотрим следующий базис

$$|e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |00\rangle), \tag{3.27}$$
$$|e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}i(|11\rangle - |00\rangle), \tag{3.28}$$
$$|e_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}i(|10\rangle + |01\rangle), \tag{3.29}$$
$$|e_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |01\rangle). \tag{3.30}$$

В данном базисе начальное и конечное состояния будут иметь вид

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1\rangle - i|e_1\rangle), \tag{3.31}$$
$$|\psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(icos(\gamma)|e_1\rangle - isin(\gamma)|e_2\rangle - i|e_3\rangle). \tag{3.32}$$

Ранее было показано [49], как вычислить степень перепутанности состояния с помощью коэффициентов разложения по базису $|e_i\rangle$, который является базисом бэлловских функций с точностью до фазы. Для состояния $|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i|e_i\rangle$ определим функцию

$$C(\psi) = \left|\sum_i \alpha_i^2\right|. \tag{3.33}$$

Данную функцию так же называют ещё согласованностью состояния $|\psi\rangle$. Используя выражение (3.33) для начального и конечного состояния, получим

$$C(\psi_i) = 0, \tag{3.34}$$

$$C(\psi_f) = -1. \tag{3.35}$$

Теперь дополнительно так же рассмотрим функции

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right), \tag{3.36}$$

$$H(x) = -[x\, log_2(x) + (1 - x)\, log_2(1 - x)], \tag{3.37}$$

, где вторая функция называется бинарной функцией энтропии. Перепутанность системы, состоящей из двух подсистем, – это по определению энтропия фон Неймана от уменьшенной матрицы плотности. В терминах введённых выше функций перепутанность состояния $|\psi\rangle$ даётся в удобном виде

$$E(\psi) = H\left(f\left(C(\psi)\right)\right), \tag{3.38}$$

при этом значение $E = 0$ означает, что состояние $|\psi\rangle$ не является перепутанным, то есть может быть представлено в виде произведения однокубитных состояний, и значение $E = 1$ означает максимальную перепутанность. Применив данное выражение к $|\psi_i\rangle$ и $|\psi_f\rangle$, получим $E(\psi_i) = 0$ и $E(\psi_f) = 1$.

Стоит отметить, что, в виду конечности свободных параметров последовательности точно соблюсти условия не удаётся, поэтому вводится теоретическая достоверность операции [50], показывающая насколько близка подобранная последовательность к идеальной. Для начального электронного состояния ионов $|\psi_0\rangle$ и колебательного состояния, заданного матрицей плотности ρ_m, достоверность записывается как

$$F = Tr_m[\langle\psi_0|U_{id}^{+}U_{re}|\psi_0\rangle\langle\psi_0|\otimes\rho_m U_{re}^{+}U_{id}|\psi_0\rangle] = Tr_m[A^{+}A\rho_m], \tag{3.39}$$

где

$$A = \langle\psi_0|U_{id}^{+}U_{re}|\psi_0\rangle,$$

$$U_{id} = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{4}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi}{4}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{i\pi}{4}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{i\pi}{4}} \end{pmatrix}, \tag{3.40}$$

$$U_{re} = \begin{pmatrix} e^{i\phi_{00}}\hat{D}_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_{01}}\hat{D}_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_{01}}\hat{D}_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\phi_{11}}\hat{D}_{11} \end{pmatrix}$$

– матрицы идеального фазового гейта и реального, соответственно, записанные в базисе $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, $\phi_{00}, \phi_{01}, \phi_{10}, \phi_{11}$ и $\hat{D}_{00}, \hat{D}_{01}, \hat{D}_{10}, \hat{D}_{11}$ – реальные фазовые сдвиги состояний $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ и операторы сдвига колебательного состояния в зависимости от электронного состояния. Можно показать, что для начального состояния $\frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{1}{2}|11\rangle$ достоверность задаётся следующим выражением

$$\begin{aligned} F = \frac{1}{16}\Bigg[& 4 + 2\exp\left(\sum_{p=1}^{3L} -4\left(\left(\vec{b}_1^{(p)} - \vec{b}_2^{(p)}\right)\vec{c}_p\right)^2\left(\frac{1}{2} + \bar{n}_p\right)\right) \\ & + 2\exp\left(\sum_{p=1}^{3L} -4\left(\left(\vec{b}_1^{(p)} + \vec{b}_2^{(p)}\right)\vec{c}_p\right)^2\left(\frac{1}{2} + \bar{n}_p\right)\right) \\ & + 4\left(\exp\left(\sum_{p=1}^{3L} -4\left(\vec{b}_1^{(p)}\vec{c}_p\right)^2\left(\frac{1}{2} + \bar{n}_p\right)\right)\right. \\ & \left. + \exp\left(\sum_{p=1}^{3L} -4\left(\vec{b}_2^{(p)}\vec{c}_p\right)^2\left(\frac{1}{2} + \bar{n}_p\right)\right)\right)\sin(2\Phi)\Bigg], \end{aligned} \tag{3.41}$$

где $n_p -$ среднее число колебательных квантов в моде p, $\vec{c}_p = 2\vec{\eta}_p \sum_{k=1}^{N} z_k e^{i\omega_p t_k}$. Для оценки достоверности также используется усреднение по начальным состояниям, при этом вид формулы с точностью до коэффициентов остаётся неизменным. Примечательно, что для описания принципа работы неадиабатического запутывания ионов не требуется использование приближения Лэмба-Дике в отличие от адиабатических квантовых вентилей. В отсутствие режима Лэмба-Дике, например при недостаточном охлаждении ионов, в теории адиабатических квантовых операций большинство выражений, описывающих

взаимодействие иона с излучением, оказываются не применимыми, и эволюция квантового состояния становится значительно более сложной. Из выражения (3.41) видно, что получение высокой достоверности неадиабатической квантовой операции всё ещё требует охлаждения ионов, то есть достаточно низких значений среднего колебательного числа, однако более высокие значения $\bar{n}_p$ могут быть компенсированы более точным замыканием фазовых траекторий. Таким образом, неадиабатические квантовые операции теоретически имеют повышенную устойчивость к более высокой температуре ионов. Эта характеристика может потенциально способствовать увеличению масштабируемости квантового компьютера, поскольку с ростом числа ионов охлаждение их колебательных мод становится более сложной задачей.

Выбор оптимального числа импульсов в каждой из серий, а также моментов их прихода для замыкания кривой на фазовой плоскости для всех колебательных мод и набора фазы является нетривиальной задачей. Был разработан ряд

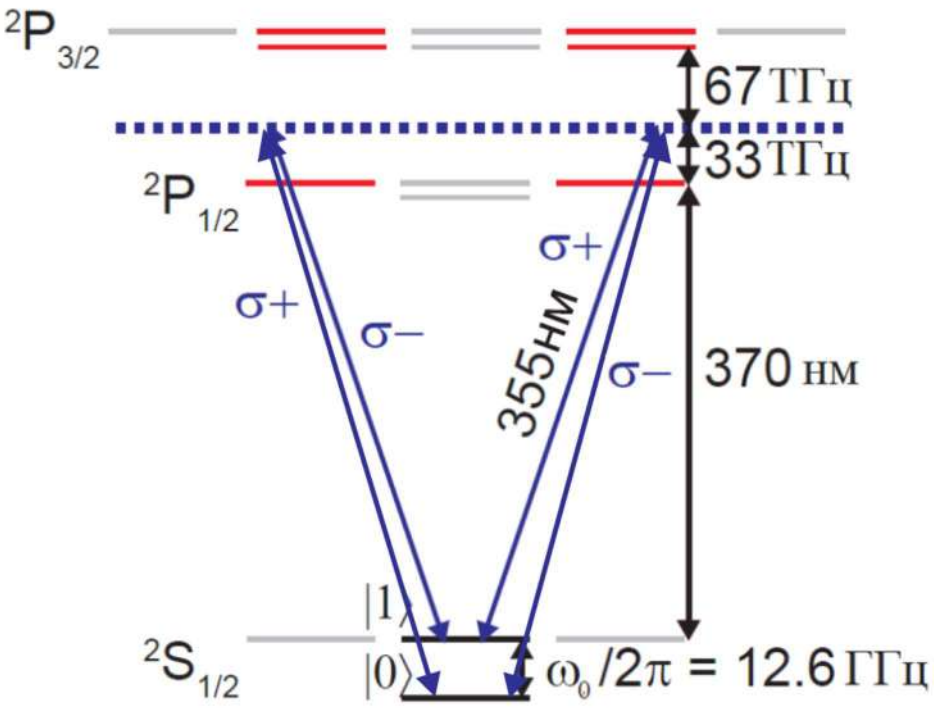


Рис. 3.2 Частичная схема уровней $^{171}Yb^+$. Возбуждение микроволнового перехода осуществляется с помощью воздействия на ион двух оптических полей, связывающих уровни кубита через виртуальный уровень, отмеченный пунктирной линией.

стратегий, обеспечивающих приближённую замкнутость фазовых траекторий до некоторого порядка малости в разложении по $\omega_p \delta t$ независимо от частоты колебательной моды. В таких схемах ряд значений z_k и t_k обладает некоторой симметрией, обеспечивающей равенство выражения $\sum_{k=1}^{N} z_k e^{i\omega_p t_k}$ нулю по крайней мере в первом порядке малости в разложении по $\omega_p \delta t$. Например в схеме FRAG [50], последовательности задаются как $z_k = \{-n, 2n, -2n, 2n, -2n, n\} (n \in N), t_k = \{-\tau_1, -\tau_2, -\tau_3, \tau_3, \tau_2, \tau_1\}$. Подбором чисел τ_3, τ_2, τ_1, а также натурального числа n, определяющего количество импульсов в серии, можно получить значение набранной геометрической фазы, близкое к $\frac{\pi}{4}$.

3.4 Экспериментальная реализация неадиабатического запутывания

Экспериментальные реализации импульсного неадиабатического квантового вентиля в той форме, которая изначально была представлена теоретически, на текущий момент отсутствуют из-за ряда ограничений таких, как, например, время жизни возбуждённого состояния Однако имеется экспериментальное подтверждение возможности неадиабатического запутывания ионов $^{171}Yb^{+}$ с использованием ультракоротких лазерных импульсов (то есть коротких по сравнению с частотой возбуждаемого перехода) на микроволновом переходе с достоверностью 76 % [51]. Было изучено несколько факторов, лимитирующих достоверность неадиабатической импульсной квантовой операции, включая неидеальность спин-зависимых толчков и микродвижение иона [52,53]. В настоящей работе был исследован фактор когерентного суммирования ошибок последовательных неидеальных спин-зависимых толчков, который оказывается одним из доминирующих для неадиабатического запутывания с использованием ультракоротких импульсов. Численное моделирование гейта в данной работе также было обобщено на случай наличия нескольких ионов, расположенных в отдельных ловушках Пауля в 1D и 2D конфигурации. Далее будет подробно показано, как этот вентиль сводится к вентилю, описанному в пункте 3.2.

Для возбуждения микроволнового перехода ${}^2S_{1/2}|F=1;m_F=0\rangle \leftrightarrow {}^2S_{1/2}|F=0;m_F=0\rangle$ в ионе ${}^{171}\mathrm{Yb}^+$ используются резонансные рамановские импульсы на длине волны 355 нм (Рис. 3.2) около 15 пс, с частотой повторения около 120 МГц и средней мощностью 4 Вт, полученные с помощью одного импульсного лазера Coherent Paladin Compact. В данной реализации приближение вращающейся волны применить не удается, так как слагаемые гамильтониана, изменяющиеся с частотой рассматриваемого перехода [54] (12.642 ГГц), не обладают достаточной скоростью изменения для учёта в этом приближении. В приближении быстро меняющейся частоты Раби можно считать, что изменение фазы кубита за время импульса является незначительным. Таким образом, все комплексные экспоненты, изменяющиеся на радиочастоте, можно принять равными единице в некоторый начальный момент времени. В этом случае в представлении взаимодействия часть гамильтониана вида $\hat{\sigma}_+ e^{i\omega_0 t} + \hat{\sigma}_- e^{-i\omega_0 t}$ становится равной $\hat{\sigma}_x$. Итоговый эффективный гамильтониан имеет вид [55]:

$$\widehat{H}_{eff}(t) = -\theta\delta(t-t_0)\cos\left[\overrightarrow{\Delta k}\vec{r} + \Delta\phi(t)\right]\hat{\sigma}_x, \qquad (3.42)$$

где θ – площадь импульса. Так как переход возбуждается парой рамановских пучков, в формуле фигурирует разность их волновых векторов и оптических фаз.

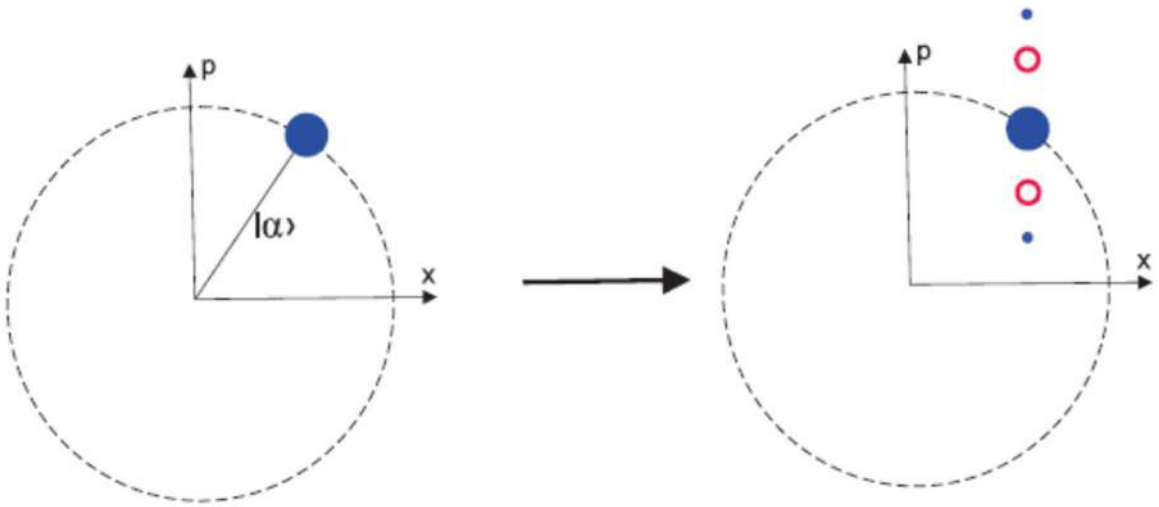


Рис. 3.3 Схематическое представление дифракции состояния кубита после воздействия ультракороткого импульса. Цвет (красный или синий) соответствует электронному состоянию (верхнему или нижнему).

Координата каждого иона цепочки может быть разложена по нормальным колебаниям как

$$\vec{r_i} = \sum_{p}^{3L} \overrightarrow{b_i^{(p)}} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\nu_p}} \left(a_p + a_p^+\right). \tag{3.43}$$

С учётом этого оператор эволюции запишется как разложение по функциям Бесселя в следующем виде:

$$U_{t0} = \exp\left(-i\int H_{eff}(t)dt\right)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\theta) e^{in\Delta\phi(t_0)} \hat{\sigma}_{x1}^n \prod_{p=1}^{3L} D\left[in\vec{b}_1^{(p)}\vec{\eta}_p\right]. \tag{3.44}$$

Этот процесс аналогичен явлению дифракции Капицы-Дирака [56] волновой функции иона на стоячей волне, формируемой лазерными импульсами. Схематически действие оператора показано на Рис. 3.3: воздействие ультракороткого импульса приводит формированию суперпозиции состояний, в которой вклады разных состояний с различными значениями приобретённого или потерянного импульса и спиновой ориентации задаются коэффициентами, определяющимися функциями Бесселя.

Сдвиг фаз импульсов относительно друг друга задаётся в экспериментальной схеме посредством прохождения пучков через пару акустооптических модуляторов с частотой около 250 МГц (сдвигающих центральную частоту импульса в большую и меньшую сторону), поэтому

$$\Delta\phi(t) = \omega_{AOM}t + \phi_0. \tag{3.45}$$

Отсюда видно, что выбором моментов прихода импульсов можно произвольно задавать разность фаз рамановских пучков. Покажем, что правильным выбором моментов прихода импульсов в серии возможно оказать воздействие на ион, сходное с действием спин-зависимого толчка. Для этого рассмотрим разложение оператора (3.44) до первого порядка по θ, положим при этом, что суммарная площадь N импульсов в серии равна Θ, тогда площадь одного импульса $\theta = \frac{\Theta}{N}$.

Также учтём, что сигма-х оператор в произвольный момент времени t становится равным $\hat{\sigma}_+ e^{i\omega_0 t} + \hat{\sigma}_- e^{-i\omega_0 t}$. С учётом этого оператор запишется в следующем виде

$$U_{t_k} = 1 + \frac{i\Theta}{2N}\left[e^{i\phi_0} \prod_{p=1}^{3L} D\left[i\vec{b}_1^{(p)} \vec{\eta}_p \right] \left(e^{iq_+ t_k} \hat{\sigma}_+ + e^{iq_- t_k} \hat{\sigma}_- \right) + e^{-i\phi_0} \prod_{p=1}^{3L} D\left[-i\vec{b}_1^{(p)} \vec{\eta}_p \right] \left(e^{-iq_+ t_k} \hat{\sigma}_- + e^{iq_- t_k} \hat{\sigma}_+ \right) \right], \quad (3.46)$$

где $q_\pm = \omega_0 \pm \omega_{AOM}$. При выполнении условия $q_+ t_k = 2\pi n, \frac{q_- t_k}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$ для любого k возникает конструктивная интерференция слагаемых, содержащих $e^{iq_+ t_k}$, и деструктивная интерференция слагаемых с $e^{iq_- t_k}$. При большом количестве импульсов N в серии можно пренебречь влиянием слагаемых, содержащих $e^{iq_- t_k}$, поэтому оператор эволюции можно записать как

$$U_{t_k} = 1 + \frac{i\Theta}{2N}\left[e^{i\phi_0} \prod_{p=1}^{3L} D\left[i\vec{b}_1^{(p)} \vec{\eta}_p \right] \hat{\sigma}_+ + e^{-i\phi_0} \prod_{p=1}^{3L} D\left[-i\vec{b}_1^{(p)} \vec{\eta}_p \right] \hat{\sigma}_- \right]. \quad (3.47)$$

При возведении в степень N и в пределе большого числа импульсов получим

$$\begin{aligned} & U_{t_k}^N \\ &= \left(1 + \frac{i\Theta}{2N}\left[e^{i\phi_0} \prod_{p=1}^{3L} D\left[i\vec{b}_1^{(p)} \vec{\eta}_p \right] \hat{\sigma}_+ + e^{-i\phi_0} \prod_{p=1}^{3L} D\left[-i\vec{b}_1^{(p)} \vec{\eta}_p \right] \hat{\sigma}_- \right] \right)^N \\ &\xrightarrow{N\to\infty} \exp\left[\frac{i\Theta}{2} \left(e^{i\phi_0} \prod_{p=1}^{3L} D\left[i\vec{b}_1^{(p)} \vec{\eta}_p \right] \hat{\sigma}_+ + e^{-i\phi_0} \prod_{p=1}^{3L} D\left[-i\vec{b}_1^{(p)} \vec{\eta}_p \right] \hat{\sigma}_- \right) \right] \quad (3.48) \\ &= \cos\frac{\Theta}{2} \\ &+ i \sin\frac{\Theta}{2} \left(e^{i\phi_0} \prod_{p=1}^{3L} D\left[i\vec{b}_1^{(p)} \vec{\eta}_p \right] \hat{\sigma}_+ + e^{-i\phi_0} \prod_{p=1}^{3L} D\left[-i\vec{b}_1^{(p)} \vec{\eta}_p \right] \hat{\sigma}_- \right). \end{aligned}$$

Если общая площадь импульсов равна π, получаем оператор спин-зависимого толчка:

$$\widehat{U}_{SDK} = e^{i\phi_0} \prod_{p=1}^{3L} D\left[i\vec{b}_1^{(p)}\vec{\eta}_p\right]\hat{\sigma}_+ + e^{-i\phi_0} \prod_{p=1}^{3L} D\left[-i\vec{b}_1^{(p)}\vec{\eta}_p\right]\hat{\sigma}_-. \quad (3.49)$$

Как было отмечено, внутри серии импульсов, формирующих СЗТ, слагаемые, содержащие e^{iq-t_k}, должны обеспечивать деструктивную интерференцию, то есть в идеальном случае $\sum_{k=1}^{N} e^{iq-t_k} = 0$. Таким образом, для формирования СЗТ необходимо соблюдение двух условий на моменты прихода импульсов:

$$\begin{gathered} \frac{q_+ t_k}{2\pi} \in \mathbb{Z}, \\ \sum_{k=1}^{N} e^{iq-t_k} = 0. \end{gathered} \quad (3.50)$$

Из-за конечного числа параметров не удается в точности выполнить данные условия. Тем не менее, результаты численного моделирования показывают, что начиная с 8 импульсов в серии можно подобрать значения t_k, обеспечивающие достоверность СЗТ выше 99.8% [55].

В экспериментальной схеме моменты прихода задаются с помощью светоделителей и линий задержки: проходя через такую оптическую систему одиночный импульс от лазерного источника разделяется на 8 менее интенсивных разнесённых во времени импульсов (Рис. 3.4). Если t_1, t_2, t_3 – временные задержки, то моменты прихода импульсов задаются как $\{0, t1, t2, t1 + t2, t3, t3 + t1, t3 + t2, t3 + t2 + t1\}$.

Далее, как уже было показано, с помощью серии спин-зависимых толчков можно достигнуть независимости результата их воздействия от начального колебательного состояния. При этом накапливается дополнительная спин-зависимая фаза, что приводит к созданию запутанного состояния. Так как достоверность получения оператора СЗТ не равна 100 %, при разработке схемы запутывания важно оценить влияние ошибок отдельных СЗТ на достоверность операции в целом. Можно предположить, что достоверность операции оценивается как простое перемножение достоверностей отдельных СЗТ, то есть если F_0 – достоверность операции, состоящей из идеальных СЗТ, определённая по

формуле (3.41), а F_1 – достоверность каждого из N СЗТ, то полная достоверность гейта будет равна $F = F_0 F_1^N$. Численное моделирование, выполненное в рамках данной работы, показало, что такая оценка даёт завышенную достоверность операции. Кроме того, из-за когерентных эффектов появляется зависимость достоверности от периода повторения лазерных импульсов.

3.5 Аналитическое объяснение когерентных эффектов

Для аналитического описания когерентных эффектов в данной работе была рассмотрена эволюция состояния под действием двух последовательных СЗТ, передающих импульс в противоположных направлениях. Так как для второго СЗТ разность фаз пучков противоположна по знаку, оператор такого СЗТ получается из первого с помощью замены $q_+ \leftrightarrow q_-$. Оператор эволюции запишется в виде

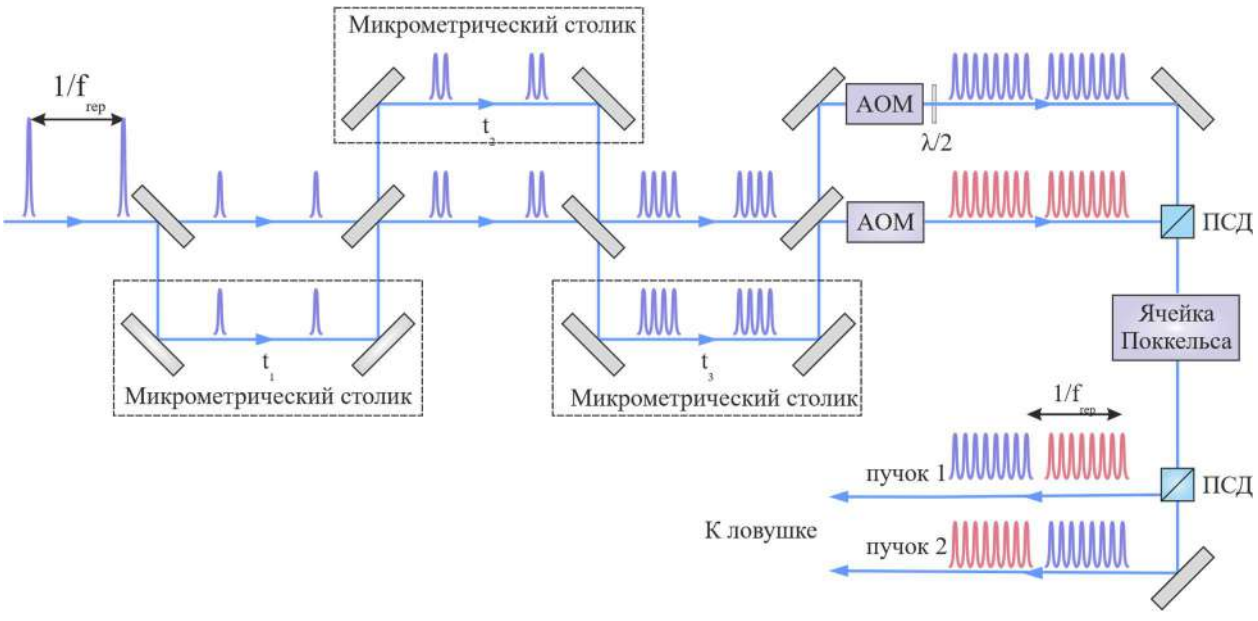


Рис. 3.4 Экспериментальная схема создания спин-зависимых толчков. ПСД – поляризационный светоделитель. При помощи ячейки Поккельса и светоделителя происходит выбор направления передачи импульса.

$$\hat{U} = \hat{U}_{pos}\hat{U}_{neg} = \Bigg[1 + \frac{i\Theta}{2N}\Bigg\{\Bigg[e^{i\phi_0}D[i\eta]\left(\sum_{k=1}^{N} e^{iq_+t_k}\right)\hat{\sigma}_+ + e^{-i\phi_0}D[-i\eta]\left(\sum_{k=1}^{N} e^{-iq_+t_k}\right)\hat{\sigma}_-\Bigg]\Bigg\} + \Bigg\{+\Bigg[e^{i\phi_0}D[i\eta]\left(\sum_{k=1}^{N} e^{iq_-t_k}\right)\hat{\sigma}_- + e^{-i\phi_0}D[-i\eta]\left(\sum_{k=1}^{N} e^{-iq_-t_k}\right)\hat{\sigma}_+\Bigg]\Bigg\} + O\left(\left(\frac{\Theta}{N}\right)^2\right)\Bigg] \times$$

$$\Bigg[1 + \frac{i\Theta}{2N}\Bigg\{\Bigg[e^{-i\phi_0}D[i\eta]\left(\sum_{k=N+1}^{2N} e^{iq_-t_k}\right)\hat{\sigma}_+ + e^{i\phi_0}D[-i\eta]\left(\sum_{k=N+1}^{2N} e^{-iq_-t_k}\right)\hat{\sigma}_-\Bigg]\Bigg\} + \Bigg\{+\Bigg[e^{-i\phi_0}D[i\eta]\left(\sum_{k=N+1}^{2N} e^{iq_+t_k}\right)\hat{\sigma}_- + e^{i\phi_0}D[-i\eta]\left(\sum_{k=N+1}^{2N} e^{-iq_+t_k}\right)\hat{\sigma}_+\Bigg]\Bigg\} + O\left(\left(\frac{\Theta}{N}\right)^2\right)\Bigg]. \quad (3.51)$$

Нерезонансное слагаемое $\sum_{k=1}^{N} e^{iq_-t_k}$ представляет собой некоторое малое комплексное число C при оптимальных моментах прихода t_k, а $\sum_{k=1}^{N} e^{iq_+t_k}$, в свою очередь, равно N. После перемножения операторов возникают резонансные слагаемые вида $\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-D[2i\eta]$ и $\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+D[-2i\eta]$, а также паразитные слагаемые $\left[\frac{C^*}{N}e^{2i\phi_0 - iq_-t_{N+1}} + \frac{C^*}{N}e^{-2i\phi_0 + iq_+t_{N+1}}\right]\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- + H.c. = \frac{2C^*}{N}e^{i\omega_{AOM}t_{N+1}}cos(2\phi_0 + \omega_0 t_{N+1})\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- + H.c.$, приводящие в итоге к ошибке гейта. Здесь t_{N+1} – момент прихода первого импульса последовательности, формирующей второй СЗТ. Это выражение демонстрирует, что если интервал между двумя последовательными СЗТ меняется, коэффициент, описывающий вклад паразитного оператора осциллирует с частотой кубитного перехода ω_0. Так как в описанной схеме СЗТ разделены целым количеством периодов повторения лазерных импульсов, ошибка операции, описываемая этими слагаемыми, будет пропорциональна $\cos\left(2\pi n T_{rep}/T_{qubit}\right)$. Стоит ожидать, что полная достоверность операции запутывания также

будет осциллировать. При этом амплитуда осцилляций имеет такой же порядок, как и ошибка одного СЗТ. Следовательно, при увеличении количества импульсов внутри одного СЗТ зависимость от периода повторения лазерных импульсов также становится менее выраженной. На рисунке 3.5 показан график зависимости достоверности операции, состоящей из четырёх последовательных СЗТ, воздействующих на один ион в ловушке. Данные графика получены с помощью численного моделирования, где каждый импульс внутри СЗТ аппроксимировался в виде оператора

$$\widehat{U}(t) = \sum_{n=-4}^{4} i^n J_n\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{in(\pm\Delta\phi(t))} \hat{\sigma}_x^n D(in\eta), \tag{3.52}$$

что соответствует урезанному до 4 порядков дифракции оператору (3.44). Симуляция производилась следующим образом. Положим, что ион находился в начальном электронном состоянии $|1\rangle$ и когерентном состоянии $|\alpha\rangle = |0\rangle$. Воздействие оператора (3.52) приводит к появлению суперпозиционного состояния, которое записывается в виде таблицы $\left\{\left\{J_{-4}\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{-4i(\pm\Delta\phi(t))}, 0, -4i\eta\right\}, \left\{J_{-3}\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{-3i(\pm\Delta\phi(t))}, 1, -3i\eta\right\},\right.$ $\left.\left\{J_{-2}\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{-2i(\pm\Delta\phi(t))}, 0, -2i\eta\right\}, \ldots\right\}$, где первое число в наборах соответствует

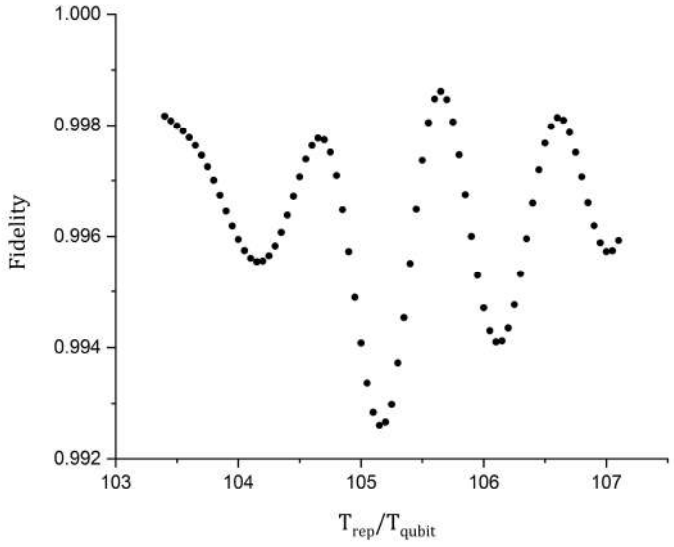


Рис. 3.5 Достоверность операции в зависимости от периода повторений лазерных импульсов, состоящей из четырёх последовательных СЗТ, приводящая к изменению импульса на 4η.

коэффициенту состояния в суперпозиции, второе число соответствует спину, третье число соответствует когерентному состоянию. В процессе моделирования состояния с амплитудами вероятности менее 10^{-4} отбрасывались.

Между импульсами свободная эволюция электронного состояния (эволюция колебательного состояния в данном случае не учитывается, так как период повторения импульсов много меньше, чем период колебания иона), описывалась оператором

$$\widehat{U}_{FE} = e^{-\frac{i\omega_0 T\hat{\sigma}_z}{2}}, \tag{3.53}$$

где T – длительность свободной эволюции. Действие оператора на суперпозиционное состояние приводит к изменению фаз всех коэффициентов на $\pm\frac{\omega_0 T}{2}$ в зависимости от спина. Действие следующего импульса приводит к увеличению количества элементов таблицы, так как каждый из элементов суперпозиции дифрагирует. Задержки были выбраны равными $t1 = \frac{2\pi\cdot 6}{\omega_0+\omega_{AOM}}, t2 = \frac{2\pi\cdot 8}{\omega_0+\omega_{AOM}}, t3 = \frac{2\pi\cdot 17}{\omega_0+\omega_{AOM}}$, обеспечивающие достоверность СЗТ 99.9 %. Частота ловушки принималась равной 33.5 КГц. Здесь и далее в численном моделировании принимаются во внимание эти параметры. Решение использовать небольшую секулярную частоту, в отличие от стандартных значений в диапазоне 0.5–2 МГц, имеет свои причины. Оно обусловлено необходимостью более точного замыкания фазовых кривых при проведении процесса запутывания и минимизации расстояния между ионами и центром планарных ловушек для уменьшения влияния микродвижения.

3.6 Численное моделирование быстрого гейта

Для исследования возможностей масштабирования ионного квантового вычислителя с помощью использования массива ловушек Пауля и неадиабатических вентилей было проведено численное моделирование эксперимента по запутыванию ионов с учётом описанной экспериментальной схемы. Расстояние между центрами ловушек принималось равным 150 мкм. Для

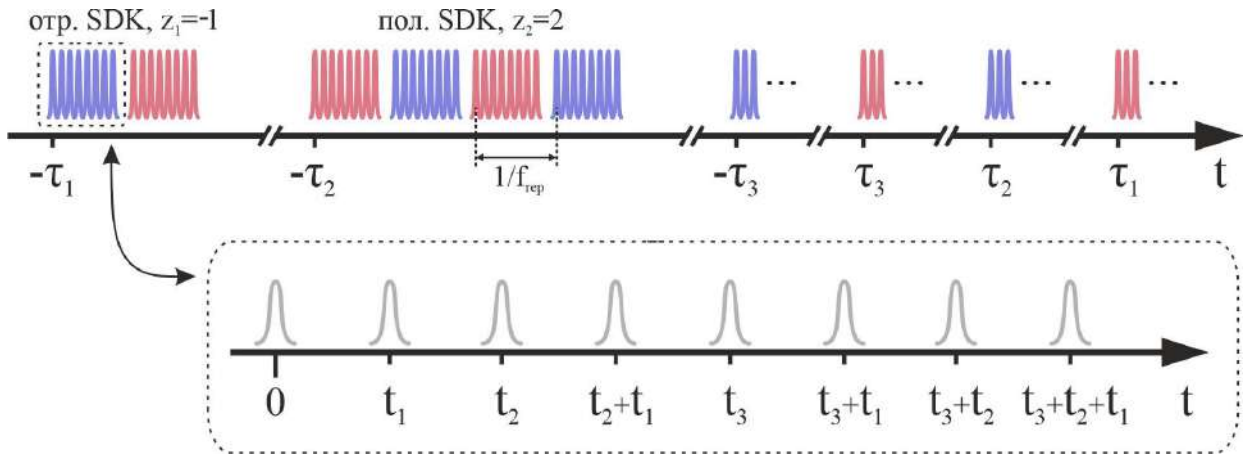


Рис. 3.6 Реализация стратегии FRAG при n=1 при использовании описанной схемы создания СЗТ. На рисунке показаны импульсы, приходящие на ион с одной из сторон. Синим цветом показаны импульсы, формирующие отрицательный СЗТ, красный цвет соответсвует положительному СЗТ.

подбора последовательности СЗТ, дающей оптимальную достоверность запутывания, была выбрана стратегия FRAG с минимальным количеством СЗТ для упрощения численного моделирования и для уменьшения влияния достоверности одного СЗТ на полную достоверность вентиля. То есть набор чисел z_k представляет собой следующую последовательность чисел

$$z_k = \{-1,2,-2,2,-2,1\}. \quad (3.54)$$

С помощью перебора с шагом 0.1 мкс в диапазоне от 0 до 100 мкс были найдены моменты прихода серий импульсов (τ_1, τ_2, τ_3) = (22.4 мкс, 13.4 мкс, 4.4 мкс), дающие максимальную достоверность операции запутывания, вычисляемую по формуле (3.41), то есть с учётом идеальных СЗТ. Приведённые параметры стратегии не менялись при изменении количества рассматриваемых ионов.

Далее полученные значения были использованы в численном моделировании с учётом схемы создания СЗТ. Так как последовательные СЗТ разнесены по времени на целое число периодов повторения лазерных импульсов, был выбран новый набор чисел (τ_1, τ_2, τ_3), ближайший к (22.4 мкс, 13.4 мкс, 4.4 мкс), удовлетворяющий условию $(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = (\frac{n_1}{f_{rep}}, \frac{n_2}{f_{rep}}, \frac{n_3}{f_{rep}})$, где n_1, n_2, n_3 – натуральные числа. Схематически моменты прихода импульсов в описанной стратегии показаны на рисунке 3.6.

Оператор эволюции при воздействии ультракороткого импульса был обобщён на случай взаимодействия с парой ионов как

$$\hat{U}(t) = \sum_{n_2=-4}^{n_2=4} \sum_{n_1=-4}^{n_1=4} \left(i^{n_1+n_2} J_{n_1}(\theta) J_{n_2}(\theta) e^{i(n_1+n_2)\Delta\phi(t)} \cdot \hat{\sigma}_{x,1}^{n_1} \sigma_{x,2}^{n_2} \prod_{p=1}^{3L} D[i n_1 \vec{b}_1^{(p)} \vec{\eta}_p + i n_2 \vec{b}_2^{(p)} \vec{\eta}_p] \right), \quad (3.55)$$

а также оператор свободной эволюции

$$\hat{U}_{FE} = e^{-i\omega_0 T(\hat{\sigma}_{z,1}+\hat{\sigma}_{z,2})/2} \prod_{p=1}^{3L} e^{-i\omega_p T a^+ a}. \quad (3.56)$$

Для экономии вычислительного времени пространство когерентных состояний было дискретизировано с шагом $|\Delta\alpha| = 10^{-4}$. В качестве начального состояния использовалось $|\psi_0\rangle = \left(\frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{1}{2}|11\rangle\right) \otimes \prod_{p=1}^{3L} |0\rangle_p$. Достоверность операции запутывания вычислялась как $F = |\langle U\psi_0|\psi_{id}\rangle|^2$, где

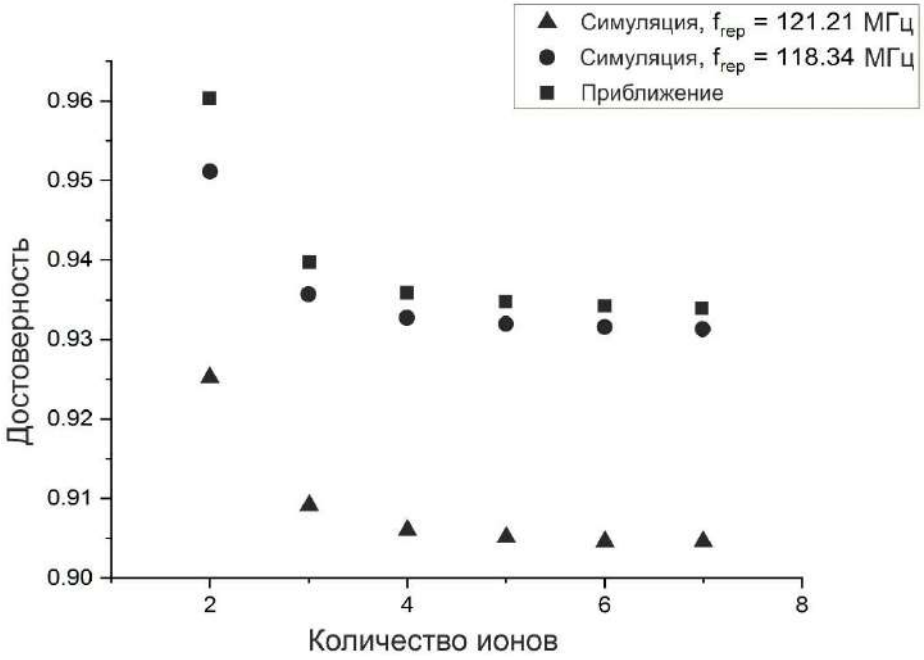


Рис. 3.7 Зависимость достоверности операции запутывания от количества ионов для двух различных частот повторений лазерных импульсов. Точки-квадраты соответствуют оценке достоверности без учёта когерентных эффектов.

$|\psi_{id}\rangle = \frac{1}{2}ie^{i\gamma}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{1}{2}ie^{-i\gamma}|11\rangle \otimes \prod_{p=1}^{3L}|0\rangle_p$. Фаза γ отлична от геометрической фазы, её появление связано с присутствием акустооптических модуляторов. Значение фазы было подобрано для максимизации достоверности, однако может быть также найдено аналитически.

Численное моделирование было выполнено при рассмотрении числа ионов от 2 до 7 при двух разных значениях частоты повторений для демонстрации когерентных эффектов. Два соседних крайних иона были выбраны в качестве кубитов для запутывания. Для наглядности достоверности, вычисленные без учёта когерентных эффектов и результаты, полученные с помощью полного численного моделирования, отображены на одном рисунке (Рис. 3.7). Как видно из рисунка, достоверность операции при увеличении числа ионов выходит на некоторую константу, что согласуется с результатами предыдущих исследований [57]. Помимо одномерного массива ловушек был также рассмотрен двумерный массив 3x3.

Положим, что каждый ион находится в псевдопотенциале ловушки $\Psi_T(x,y) = \frac{m\omega^2(x^2+y^2)}{2e}$, где $\omega = 2\pi \times 33.5$ КГц. Положения равновесия ионов были найдены численно, как решения дифференциальных уравнения движения ионов с затуханием на больших временах. Уравнения записываются в виде

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_{mn} = & \sum_{\substack{p=1 \\ q=1 \\ \{p\neq m, q\neq n\}}}^{P,Q} \frac{k\left(x_{mn}-x_{pq}\right)e^2}{\left[\left(x_{mn}-x_{pq}\right)^2+\left(y_{mn}-y_{pq}\right)^2\right]^{3/2}} + m\omega^2(x_{mn} \\ & - mx_0) + \gamma\dot{x}_{mn}, \\ m\ddot{y}_{mn} = & \sum_{\substack{p=1 \\ q=1 \\ \{p\neq m, q\neq n\}}}^{P,Q} \frac{k\left(y_{mn}-y_{pq}\right)e^2}{\left[\left(x_{mn}-x_{pq}\right)^2+\left(y_{mn}-y_{pq}\right)^2\right]^{3/2}} + m\omega^2(y_{mn} \\ & - ny_0) + \gamma\dot{y}_{mn}, \end{aligned} \tag{3.57}$$

где x_{mn}, y_{mn} – абсолютные координаты иона, находящегося в ловушке с центром (mx_0, nx_0), $x_0 = 150$ мкм – расстояние между ловушками, $P \times Q$ – размерность матрицы из ловушек, m, n – натуральные числа от 1 до P и от 1 до Q, соответственно, $k \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2}$, $e \approx 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл, m – заряд и масса иона. В точках, отвечающим положениям равновесия, были численно найдены элементы матрицы Гессе для функции потенциальной энергии ионов, задающейся выражением:

Параметры моды / №	ω_p, Гц	b_{1py}, b_{2py}
1	214053	$0.17, -0.40;\ -0.16, 0.15$
2	213577	$-0.20, 0.41$
3	212657	$-0.21, 0.40$
4	212616	$0.27, 0$
5	212117	$0.01, -0.17;\ -0.20, 0.36$
6	211413	$0.29, 0$
7	211159	$-0.06, 0.07; 0.47, 0.02$
8	210666	$-0.23, 0$
9	210357	$-0.29, -0.28$
10	210312	$-0.01, -0.01;\ -0.33, -0.33$
11	209749	$0.21, 0$
12	209157	-0.28, -0.30
13	209058	0.24,0.13; -0.11, -0.17

Табл. 4 Вычисленные частоты мод нормальных колебаний и амплитудные векторы. Общее количество мод равно 18 (учитываются только колебания вдоль плоскости ловушек), некоторые моды являются вырожденными и соответствуют строкам, содержащим два различных амплитудных вектора.

$$U(x_{11}, y_{11}, \dots, x_{PQ}, y_{PQ})$$

$$= \sum_{\substack{m=1 \\ n=1}}^{P,Q} \frac{1}{2} m\omega^2((x_{mn} - mx_0)^2 + (y_{mn} - ny_0)^2)$$

$$+ \sum_{\substack{m=1,n=1 \\ p=1,q=1, \\ \{m\neq p, n\neq q\}}}^{P,Q} \frac{ke^2}{2\sqrt{(x_{mn} - x_{pq})^2 + (y_{mn} - y_{pq})^2}}. \quad (3.58)$$

Собственные значения и собственные вектора матрицы Гессе также были найдены численно. Полученные значения частот мод нормальных колебаний и амплитудных векторов для двух соседних ионов (в угловой ловушке и в соседней вдоль стороны квадрата) приведены в таблице 4.

Для запутывания были выбраны угловой ион и соседний с ним вдоль стороны квадрата (Рис. 3.8). Лазерные пучки полагались направленными под углом 45 градусов к плоскости ловушки, так что разность волновых векторов направлена по прямой, соединяющей запутываемые ионы. Такое направление пучков обеспечивает быстрый набор геометрической фазы, так как вызывает значительное изменение энергии взаимодействия ионов. Общее число нормальных мод колебаний такой системы равно 27, однако учитывались лишь 18 мод колебаний вдоль плоскости ловушки, так как разность волновых векторов не возбуждает колебания, перпендикулярные плоскости ловушки. В представленной системе достоверность запутывания составляет 93.7 % при расчёте без учёта

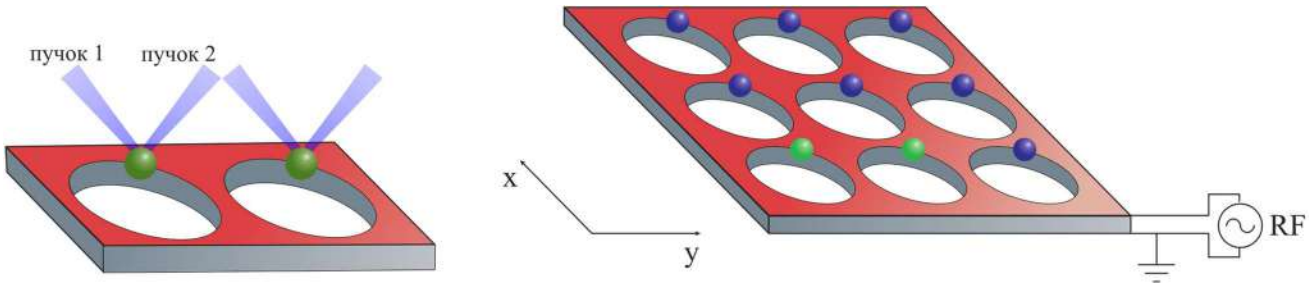


Рис. 3.8 Двумерный массив ловушек Пауля и перепутываемые ионы в них (выделены зелёным цветом).

когерентных эффектов, в то время как полное численное моделирование даёт значение 91.7 % при частоте повторения 121.21 МГц. Полученные результаты ещё раз подчёркивают важность проведения полного численного моделирования.

Одним из наиболее важных видов технических шумов, влияющих на достоверность неадиабатических квантовых операций, является флуктуация интенсивности лазерных пучков. В рамках данной работы был оценён вклад флуктуаций интенсивности в достоверность операции запутывания для описанной выше экспериментальной схемы. В данном случае эффективная частота Раби, определяющая осцилляции Раби в рамановском переходе, пропорциональна мощности лазера. Поэтому флуктуация интенсивности лазерных пучков равносильна отклонению площади импульса от оптимального значения, равного $\frac{\pi}{8}$. Результаты численного моделирования приведены на рисунке 3.9.

Из графика видно, что данный гейт обладает высокой чувствительностью к флуктуации интенсивности лазера. Флуктуации на уровне 1% могут приводить к достоверности операции ниже 90%. Для предотвращения этого требуется

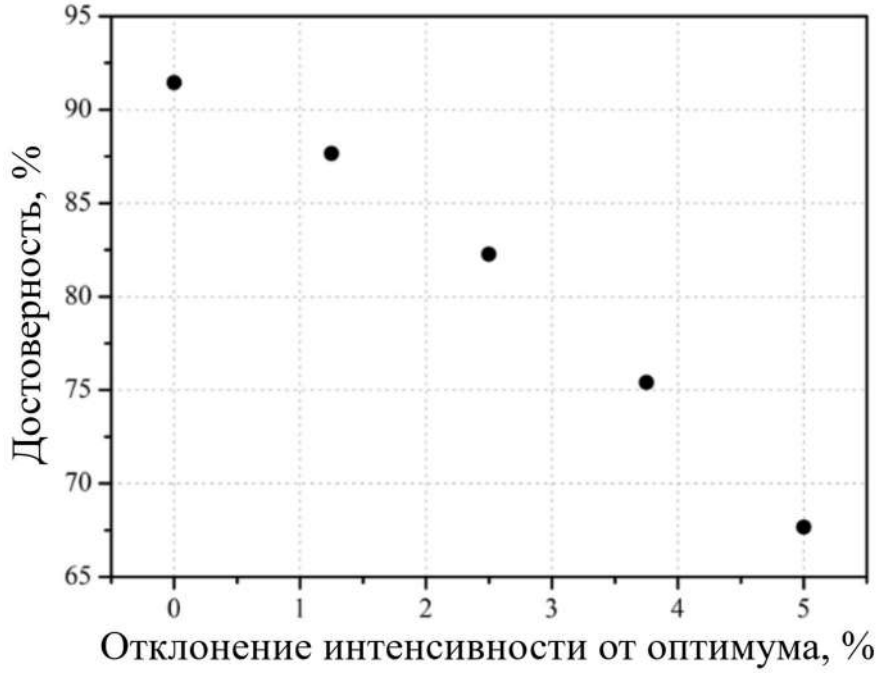


Рис. 3.9 Зависимость достоверности операции запутывания от отклонения интенсивности лазерных пучков от оптимального значения.

эффективная система стабилизации оптической мощности.

Основные результаты главы 3

1. Показано, что при реализации неадиабатической операции перепутывания с ультракороткими лазерными импульсами возникают когерентные эффекты, которые существенно влияют на достоверность.
2. Произведено численное моделирование быстрого гейта с учётом когерентных эффектов в случае присутствия нескольких ионов, расположенных в одномерных и двумерных массивах ловушек Пауля. Показано, что подбором периода повторений импульсов возможно увеличить достоверность операции до 95% для двух ионов и до 93% для 7 ионов, при этом достоверность выходит на некоторую константу при увеличении числа ионов.
3. Вычислены собственные частоты и амплитудные вектора конфигурации ионов иттербия, находящихся в двумерном массиве ловушек Пауля 3x3.
4. Произведена оценка влияния флуктуаций интенсивности лазера на достоверность неадиабатической операции запутывания. Показано, что флуктуации на уровне 1% приводят к достоверности операции ниже 90%.

Основные результаты данной главы опубликованы в [32].

Заключение

Таким образом, в работе были рассмотрены такие методы масштабирования ионного квантового вычислителя как использование быстрых квантовых вентилей и переход к кудитным системам. Был экспериментально продемонстрирован кудитный процессор на основе ионов иттербия и теоретически показана эффективность использования неадиабатических квантовых операций при

увеличении числа ионов. Дальнейшими планами является проведение экспериментов по реализации неадиабатических квантовых операций.

В работе получены следующие основные результаты:

1. Проведена оптимизация параметров глубокого охлаждения иона магния-25 согласно предложенному методу и произведено численное моделирование охлаждения за 120 циклов с температуры доплеровского предела до температуры, соответствующей среднему колебательному числу, равному 0.05.
2. Сконструирована экспериментальная установка, выполнен захват пары ионов иттербия в ловушку Пауля. Выполнено доплеровское охлаждение и охлаждение до основного колебательного состояния осевых мод колебаний.
3. Продемонстрирован универсальный набор кудитных квантовых операций на паре захваченных в ловушку ионах иттербия. Получены достоверности однокудитных операций выше 82% и достоверность двухкудитной операции 65%. Показано, что основной вклад в ошибку двухкудитной операции вносят фазовые шумы лазерного источника.
4. Показано, что при реализации неадиабатической операции перепутывания с ультракороткими лазерными импульсами возникают когерентные эффекты, которые существенно влияют на достоверность.
5. Произведено численное моделирование быстрого гейта с учётом когерентных эффектов в случае присутствия нескольких ионов, расположенных в одномерных и двумерных массивах ловушек Пауля. Показано, что подбором периода повторений импульсов возможно увеличить достоверность операции до 95% для двух ионов и до 93% для 7 ионов, при этом достоверность выходит на некоторую константу при увеличении числа ионов.
6. Вычислены собственные частоты и амплитудные вектора конфигурации ионов иттербия, находящихся в двумерном массиве ловушек Пауля 3x3.
7. Произведена оценка влияния флуктуаций интенсивности лазера на

достоверность неадиабатической операции запутывания. Показано, что флуктуации на уровне 1% приводят к достоверности операции ниже 90%.

Благодарности

В заключение, я хотел бы поблагодарить людей, которые помогали мне выполнить данную работу. Во-первых, моего научного руководителя, Николая Николаевича Колачевского, за возможность участвовать в интересных проектах международного уровня, а также за поддержку и мотивацию в течение всего периода подготовки диссертации. Также я выражаю признательность Хабаровой Ксении Юрьевне за мудрое руководство ионными проектами, а также за советы по написанию научных текстов во время моего обучения в бакалавриате. Кроме того, я благодарю Вадима Николаевича Сорокина за проведение совместных научных семинаров и полезные советы на протяжении всей научной деятельности, а также кафедру квантовой радиофизики МФТИ за учебные курсы, заложившие мой теоретический фундамент.

Также я благодарю коллег по лаборатории, которые создавали дружественную и продуктивную атмосферу: Илью Семерикова, Илью Заливако, Александра Борисенко, Михаила Аксёнова, Никиту Семенина, Василия Смирнова, Андрея Королькова.

Наконец, я выражаю благодарность своим родным и близким за любовь и поддержку, которая сделала данную работу возможной.

Список литературы

1. Benioff P. The computer as a physical system: A microscopic quantum mechanical Hamiltonian model of computers as represented by Turing machines // J. Stat. Phys. 1980. Vol. 22, № 5. P. 563–591.

2. Feynman R.P. Simulating Physics with Computers // Int. J. Theor. Phys. 1982. Vol. 21. P. 467–488.

3. Shor P.W. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring // Proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science. 1994. P. 124–134.

4. Grover L.K. A fast quantum mechanical algorithm for database search // Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing. 1996. P. 212–219.

5. Monroe C. et al. Demonstration of a fundamental quantum logic gate // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 75, № 25. P. 4714–4717.

6. L.M.K.Vandersypen et al. Experimental realization of Shor's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance // Nature. 2001. Vol. 414, № 1976. P. 883–887.

7. Debnath S. et al. Demonstration of a small programmable quantum computer with atomic qubits // Nature. 2016. Vol. 536, № 7614. P. 63–66.

8. Wright K. et al. Benchmarking an 11-qubit quantum computer // Nat. Commun. 2019. № 2019. P. 1–6.

9. Arute F. et al. Quantum supremacy using a programmable superconducting processor // Nature. 2019. Vol. 574, № 7779. P. 505–510.

10. Wang P. et al. Single ion qubit with estimated coherence time exceeding one hour // Nat. Commun. 2021. Vol. 12, № 1.

11. James D.F.V. Quantum dynamics of cold trapped ions with application to quantum computation // Appl. Phys. B Lasers Opt. 1998. Vol. 66, № 2. P. 181–190.

12. Schiffer J.P. Phase transitions in anisotropically confined ionic crystals // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 70, № 6. P. 818–821.

13. Kielpinski D., Monroe C. W.D.J. Architecture for a large-scale ion-trap quantum computer // Nature. 2002. Vol. 417. P. 709–711.

14. Duan L.M. Scaling ion trap quantum computation through fast quantum gates // Phys. Rev. Lett. 2004. Vol. 93, № 10. P. 1–4.

15. Nikolaeva A.S., Kiktenko E.O., Fedorov A.K. Efficient realization of quantum algorithms with qudits // arXiv Prepr. arXiv2111.04384. 2021. P. 1–14.

16. Klimov A.B. et al. Qutrit quantum computer with trapped ions // Phys. Rev. A - At. Mol. Opt. Phys. 2003. Vol. 67, № 6. P. 7.

17. Low P.J. et al. Practical trapped-ion protocols for universal qudit-based quantum computing // Phys. Rev. Res. American Physical Society, 2020. Vol. 2, № 3. P. 33128.

18. Ralph T.C., Resch K.J., Gilchrist A. Efficient Toffoli gates using qudits // Phys. Rev. A - At. Mol. Opt. Phys. 2007. Vol. 75, № 2. P. 1–5.

19. Ionicioiu R., Spiller T.P., Munro W.J. Generalized Toffoli gates using qudit catalysis // Phys. Rev. A - At. Mol. Opt. Phys. 2009. Vol. 80, № 1. P. 1–5.

20. Tan T.R. et al. Multi-element logic gates for trapped-ion qubits // Nature. Nature Publishing Group, 2015. Vol. 528, № 7582. P. 380–383.

21. Gaebler J.P. et al. High-Fidelity Universal Gate Set for Be 9 + Ion Qubits // Phys. Rev. Lett. 2016. Vol. 117, № 6. P. 1–5.

22. Ballance C.J. et al. High-Fidelity Quantum Logic Gates Using Trapped-Ion

Hyperfine Qubits // Phys. Rev. Lett. 2016. Vol. 117, № 6. P. 1–6.

23. Abramowitz M., Irene S. Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. US Government printing office, 1970. P. 470.

24. Leibfried D. et al. Quantum dynamics of single trapped ions // Rev. Mod. Phys. 2003. Vol. 75, № 1. P. 281–324.

25. Dubin D. H. E. Theory of structural phase transitions in a trapped Coulomb crystal // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 71, № 17. P. 2753.

26. Riehle F. Frequency Standards: Basics and Applications. John Wiley & Sons, 2004. 1–526 p.

27. Monroe C. et al. Resolved-Sideband Raman Cooling of a Bound Atom to the 3D Zero-Point Energy // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 75, № 22. P. 4011–4014.

28. Power E.A., Thirunamachandran T. On the nature of the Hamiltonian for the interaction of radiation with atoms and molecules: (e / m c)p·A, −μ·E, and all that // Am. J. Phys. 1978. Vol. 46, № 4. P. 370–378.

29. Hemmerling, B., Gebert, F., Wan, Y., Nigg, D., Sherstov, I. V., & Schmidt P.O. A Single Laser System for Ground-State Cooling of 25 Mg + // Appl. Phys. B Lasers Opt. 2011. Vol. 104, № 104. P. 583–590.

30. Che H. et al. Efficient Raman sideband cooling of trapped ions to their motional ground state // Phys. Rev. A. 2017. Vol. 96, № 1. P. 1–9.

31. П. Л. Сидоров, И. В. Заливако, А. С. Борисенко, И. А. Семериков К.Ю.Х. Оптимизация процесса рамановского охлаждения иона 25Mg+ до основного колебательного состояния в линейной ловушке Пауля // Краткие сообщения по физике Физического института им. ПН Лебедева Российской Академии Наук. 2019. Vol. 46, № 4. P. 46–53.

32. Sidorov P. et al. Coherent effects of pulsed fast gate in 1D- and 2D ion quantum

computer architectures // Phys. Lett. Sect. A Gen. At. Solid State Phys. Elsevier B.V., 2022. Vol. 450. P. 128370.

33. Debnath S. A programmable five qubit quantum computer using trapped atomic ions // PhD thesis. University of Maryland, College Park, 2016.

34. Bloch F. Nuclear induction // Phys. Rev. 1946. Vol. 70, № 7–8. P. 460–474.

35. Ringbauer M. et al. A universal qudit quantum processor with trapped ions // Nat. Phys. 2022. Vol. 18, № 9. P. 1053–1057.

36. Mølmer K., Sørensen A. Multiparticle entanglement of hot trapped ions // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 82, № 9. P. 1835–1838.

37. Valahu C.H., Apostolatos I., Weidt S. Quantum control methods for robust entanglement of trapped ions // J. Phys. B At. Mol. Opt. Phys. IOP Publishing, 2022. Vol. 55, № 20. P. 204003.

38. Pinnington E.H., Rieger G., Kernahan J.A. Beam-laser measurements of the lifetimes of the 6p levels in Yb II // Phys. Rev. A - At. Mol. Opt. Phys. 1997. Vol. 56, № 3. P. 2421–2423.

39. Happer W. Optical Pumping // Rev. Mod. Phys. 1972. Vol. 44, № 2. P. 169–249.

40. Семенин, Н. В., Борисенко, А. С., Заливако, И. В., Семериков, И. А., Хабарова, К. Ю., & Колачевский Н.Н. Оптимизация достоверности считывания квантового состояния оптического кубита в ионе иттербия 171Yb+ // Письма В Журнал Экспериментальной И Теоретической Физики. 2021. Vol. 114, № 7-8(10). P. 553–559.

41. Siverns J.D. et al. On the application of radio frequency voltages to ion traps via helical resonators // Appl. Phys. B Lasers Opt. 2012. Vol. 107, № 4. P. 921–934.

42. Rempe G. et al. Measurement of ultralow losses in an optical interferometer // Opt. Lett. 1992. Vol. 17, № 5. P. 363.

43. R.W.P. D. Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator // Appl. Phys. B. 1983. Vol. 31, № 2. P. 97–105.

44. Berkeland D.J., Boshier M.G. Destabilization of dark states and optical spectroscopy in Zeeman-degenerate atomic systems // Phys. Rev. A - At. Mol. Opt. Phys. 2002. Vol. 65, № 3. P. 13.

45. Ejtemaee S., Thomas R., Haljan P.C. Optimization of Yb171+ fluorescence and hyperfine-qubit detection // Phys. Rev. A - At. Mol. Opt. Phys. 2010. Vol. 82, № 6. P. 1–18.

46. Nakav H. et al. The effect of fast noise on the fidelity of trapped-ions quantum gates // Phys. Rev. A. 2023. Vol. 107, № 4. P. 042622.

47. Aksenov M.A. et al. Realizing quantum gates with optically addressable Yb + 171 ion qudits // Phys. Rev. A. 2023. Vol. 107, № 5. P. 1–11.

48. García-Ripoll J.J., Zoller P., Cirac J.I. Speed optimized two-qubit gates with laser coherent control techniques for ion trap quantum computing // Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 91, № 15. P. 2–5.

49. Hill S., Wootters W.K. Entanglement of a Pair of Quantum Bits // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78, № 26. P. 5022–5025.

50. Bentley C.D.B., Carvalho A.R.R., Hope J.J. Trapped ion scaling with pulsed fast gates // New J. Phys. 2015. Vol. 17, № 10. P. 1–6.

51. Wong-Campos J.D. et al. Demonstration of Two-Atom Entanglement with Ultrafast Optical Pulses // Phys. Rev. Lett. 2017. Vol. 119, № 23. P. 1–5.

52. Gale E.P.G. et al. Optimized fast gates for quantum computing with trapped ions // Phys. Rev. A. American Physical Society, 2020. Vol. 101, № 5. P. 052328.

53. Ratcliffe A.K., Oberg L.M., Hope J.J. Micromotion-enhanced fast entangling gates for trapped-ion quantum computing // Phys. Rev. A. American Physical

Society, 2020. Vol. 101, № 5.

54. Tamm C., Schnier D., Bauch A. Radio-frequency laser double-resonance spectroscopy of trapped 171Yb ions and determination of line shifts of the ground-state hyperfine resonance // Appl. Phys. B Laser Opt. 1995. Vol. 60, № 1. P. 19–29.

55. Mizrahi J.A. Ultrafast Control of Spin and Motion in Trapped Ions // PhD thesis. University of Maryland, College Park, 2013.

56. Kapitza P.L., Dirac P.A.M. The reflection of electrons from standing light waves // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Science, 1933. Vol. 29, № 2. P. 297–300.

57. Ratcliffe A.K., Taylor R.L., Hope J.J. Scaling Trapped Ion Quantum Computers Using Fast Gates and Microtraps // Phys. Rev. Lett. 2018. Vol. 120. P. 220501.

58. Cirac J.I., Zoller P. Quantum computations with cold trapped ions // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 74, № 20. P. 4091–4094.

59. Magnus W. On the exponential solution of differential equations for a linear operator // Commun. pure Appl. Math. 1954. Vol. VII. P. 649–673.

Приложения

Гейт Мёльмера-Соренсена

Идея метода перепутывания ионов Мёльмера и Соренсена состоит в воздействии бихроматического поля на пару ионов с частотами, близкими к резонансным с красными и синими боковыми частотами колебательного спектра некоторой моды колебаний ионов. Можно видеть (Рис. 4.1), что в таком случае возникают 4 двухфотонных перехода между двухкубитными состояниями $|00\rangle$ и $|11\rangle$. Подбором площади импульса можно получить максимально запутанное состояние с одинаковым вкладом состояний $|00\rangle$ и $|11\rangle$. Примечательно при этом, что частоты Раби двухфотонных переходов, включающих в себя промежуточные состояния с числом колебательных квантов $n+1$ и $n-1$, в приближении Лэмба-Дике пропорциональны $\frac{n+1}{\mu-\nu}$ и $\frac{n}{\nu-\mu}$, соответственно, где μ – отстройка лазерных полей от колебательного резонанса, – частота колебательной моды. Данные выражения имеют одинаковые по модулю и противоположные по знаку знаменатели, поэтому их интерференция в итоговом гамильтониане приведёт к исчезновению зависимости эффективной частоты Раби от n, т.е. выполнение операции не зависит от колебательных состояний ионов в приближении Лэмба-Дике и в отсутствие нерезонансного возбуждения остальных колебательных мод. Это означает, что гейт Мёльмера-Соренсена гораздо менее чувствителен к температуре ионов, чем, например, CNOT гейт Цирака-Цоллера [58]. Эволюция состояний ионов содержит, однако, также и однофотонные процессы. Чтобы

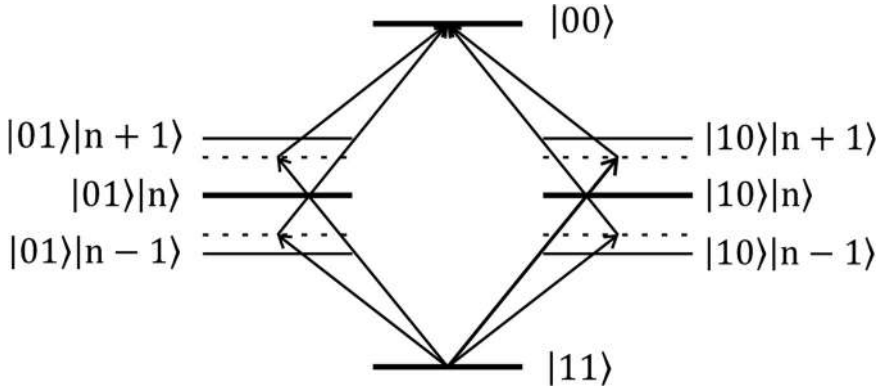


Рис. 4.1 Двухфотонные переходы при проведении операции Мёльмера-Соренсена.

показать, что при определённых условиях оператор эволюции состояния представляет собой «чистую» двухкубитную операцию, т.е. содержит лишь попарные произведения сигма-операторов, относящихся к разным ионам, рассмотрим полный гамильтониан взаимодействия ионов с бихроматическим полем в режиме Лэмба-Дике [33], его вид следует из обобщения формулы (1.31) на несколько ионов в цепочке (и несколько нормальных мод колебаний ионов) :

$$\widehat{H}_{MS} = -\sum_{l,j} \hbar \eta_{l,j} \Omega_j \cos\left(\delta t + \phi_M^{(j)}\right)\left(\hat{a}_l e^{-i\omega_l t} + \hat{a}_l^{\dagger} e^{i\omega_l t}\right)\hat{\sigma}_{\phi}^{(j)}, \tag{4.1}$$

где l, j – номер колебательной моды и номер иона соответственно, ω_l – циклическая частота колебательной моды, $\eta_{l,j} = k\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_l}}\, b_{l,j}$, $b_{l,j}$ – вклад нормальной моды l в колебание иона j, $\phi_M^{(j)} = \frac{\phi_r^{(j)} - \phi_b^{(j)}}{2}$, $\phi_S^{(j)} = \frac{\phi_r^{(j)} + \phi_b^{(j)}}{2}$ $\phi_r^{(j)}$, $\phi_b^{(j)}$ – начальные оптические фазы лазерных пучков с отстройкой в красную и синюю области соответственно в месте расположения иона j, $\hat{\sigma}_{\phi}^{(j)} = \hat{\sigma}_x^{(j)} \sin\phi_S^{(j)} + \hat{\sigma}_y^{(j)} \cos\phi_S^{(j)}$. Согласно разложению Магнуса [59], оператор эволюции имеет вид:

$$\widehat{U}(\tau) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \hat{A}_k(\tau)\right), \tag{4.2}$$

где

$$\hat{A}_1(\tau) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^{\tau} \widehat{H}_{MS} dt, \tag{4.3}$$

$$\hat{A}_2(\tau) = -\frac{1}{2\hbar^2}\int_0^{\tau} dt_1 \int_0^{t_1} \left[\widehat{H}_{MS}(t_1), \widehat{H}_{MS}(t_2)\right] dt_2. \tag{4.4}$$

Коммутационные соотношения между операторами рождения и уничтожения обеспечивают равенство нулю слагаемых разложения при $k > 2$. Если подставить выражение для гамильтониана (4.1) в (4.3) выражение будет иметь вид:

$$\hat{A}_1(\tau) = \sum_{l,j} \left(\alpha_{l,j}(\tau)\hat{a}_l^\dagger - \alpha_{l,j}^*(\tau)\hat{a}_l\right)\hat{\sigma}_\phi^{(j)}, \tag{4.5}$$

где

$$\alpha_{l,j}(\tau) = i\eta_{l,j}\int_0^\tau \Omega_j(t)\cos\left(\delta t + \phi_M^{(j)}\right)e^{i\omega_l t}dt. \tag{4.6}$$

Можно видеть, что экспонента от оператора $\hat{A}_1$ имеет вид произведения операторов смещения когерентного состояния колебательных мод, причём смещение определяется выражением (4.6). В приближении малой отстройки

$$\alpha_{l,j} \approx -\frac{\eta_{l,j}\Omega_j e^{-i\phi_M^{(j)}}\left(e^{-i\mu_l\tau} - 1\right)}{2\mu_l}. \tag{4.7}$$

Отсюда видно, что на фазовой плоскости при любом τ когерентное состояние лежит на окружности, проходящей через начало координат, с радиусом $\frac{\eta_{l,j}\Omega_j}{2\mu_l}$. При этом из-за наличия сигма-оператора $\hat{\sigma}_\phi^{(j)}$ траектории состояний будут симметричны относительно начала координат для начальных собственных состояний $\hat{\sigma}_\phi^{(j)}$, то есть действие оператора эволюции эквивалентно действию некоторой спин-зависимой силы, что является ключевым фактором запутывания ионных кубитов. Второй оператор $\hat{A}_2(\tau)$ в разложении Магнуса можно записать в виде

$$\hat{A}_2(\tau) = 2i\chi_{jk}(\tau)\hat{\sigma}_\phi^{(j)}\hat{\sigma}_\phi^{(k)}, \tag{4.8}$$

где для одинаковых и постоянных частот Раби, в случае двух колебательных мод (двух ионов в цепочке), при малой отстройке от аксиальной моды (при этом $\eta_1 = -\eta_2 = \frac{\eta}{\sqrt{2}}$)

$$\chi_{jk}(\tau) \approx \frac{\eta^2\Omega^2}{4}\left(\frac{\tau\cos\left(\phi_M^{(j)}-\phi_M^{(k)}\right)}{2\mu}\right.$$
$$\left.-\frac{\sin\left(\mu\tau+\phi_M^{(j)}-\phi_M^{(k)}\right)-\sin\left(\phi_M^{(j)}-\phi_M^{(k)}\right)}{2\mu^2}\right). \quad (4.9)$$

Из (4.7) следует, что при $\tau=\frac{2\pi}{\mu}$ колебательное состояние становится равным начальному состоянию, при этом полный оператор эволюции содержит только слагаемые вида $\hat{\sigma}_\phi^{(j)}\hat{\sigma}_\phi^{(k)}$, т.е. представляет собой двухкубитную операцию:

$$\widehat{U}_{MS}=\exp\left(2i\chi\hat{\sigma}_\phi^{(1)}\hat{\sigma}_\phi^{(2)}\right), \quad (4.10)$$

где, как следует из (4.9),

$$\chi=\pi\left(\frac{\eta\Omega}{2\mu}\right)^2\cos\left(\phi_M^{(1)}-\phi_M^{(2)}\right), \quad (4.11)$$

что при равных фазах равно площади окружности с радиусом $\frac{\eta\Omega}{2\mu}$, то есть площади, которую ограничивает траектория состояния на фазовой плоскости за время проведения операции.

В квантовых вычислениях начальное, обычно нижнее по энергии состояние, принято обозначать $|00\rangle$, поэтому для удобства сделаем переобозначение $|0\rangle\leftrightarrow|1\rangle$. Можно показать, что при действии оператора (4.10) на состояние $|00\rangle$ получается состояние

$$|\psi\rangle=\cos(2\chi)|00\rangle-i\sin(2\chi)e^{i\left(\phi_S^{(1)}+\phi_S^{(2)}\right)}|11\rangle. \quad (4.12)$$

Т.к. начальные фазы кубитов можно выбрать произвольно, при $\chi=\frac{\pi}{8}$ получаем состояние Белла:

$$|\psi\rangle=\frac{|00\rangle-i|11\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (4.13)$$

Таким образом, при условиях $\tau = \frac{2\pi}{\mu}$ и $\chi = \frac{\pi}{8}$ реализуется максимально перепутанное состояние, откуда можно выразить μ и τ через частоту Раби:

$$\mu = 2\eta\Omega\sqrt{\cos\left(\phi_M^{(1)} - \phi_M^{(2)}\right)},$$
$$\tau = \frac{\pi}{\eta\Omega\sqrt{\cos\left(\phi_M^{(1)} - \phi_M^{(2)}\right)}}. \quad (4.14)$$

Измерение достоверности двухкубитной операции

На практике для проведения эксперимента по перепутыванию кубитов необходимо оптимизировать большое количество экспериментальных параметров, поэтому должен быть использован простой экспериментальный метод измерения достоверности проведённой операции. То есть после каждого эксперимента требуется выполнить измерение некоторой величины, показывающей, насколько полученное состояние близко к идеальному (к состоянию (4.14)). Положим, что ρ – матрица плотности полученного состояния, тогда достоверность получения состояния Белла запишется как

$$F = \langle\psi|\rho|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(\rho_{00,00} + i\rho_{11,00} - i\rho_{00,11} + \rho_{11,11}\right) = \frac{p_{00} + p_{11}}{2} + \mathrm{Im}\,\rho_{00,11}, \quad (4.15)$$

где p_{00}, p_{11} – населённости состояний $|00\rangle$ и $|11\rangle$, $\rho_{00,11}$ – недиагональный элемент матрицы плотности. Можно подобрать фазу запутанного состояния так, чтобы максимизировать величину (4.15), тогда выражение примет вид

$$F = \frac{p_{00} + p_{11}}{2} + \left|\rho_{00,11}\right|. \quad (4.16)$$

Величины p_{00} и p_{11} легко измерить в эксперименте по сигналу флюоресценции ионов. Для измерения величины $\left|\rho_{00,11}\right|$ к обоим ионам прикладывается резонансный $\frac{\pi}{2}$ – импульс с управляемой оптической фазой ϕ, соответствующий

оператору эволюции состояния

$$\widehat{U}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & e^{-i\phi} \\ -e^{i\phi} & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.17}$$

Матрица плотности преобразуется как $\widehat{U}\rho\widehat{U}^{\dagger}$ под действием оператора эволюции, поэтому населённость произвольного базисного состояния $|\psi\rangle$ после проведения исследуемой квантовой операции и анализирующего импульса запишется как

$$p = \langle\psi|\widehat{U}\rho\widehat{U}^{\dagger}|\psi\rangle = \langle\widehat{U}^{\dagger}\psi|\rho|\widehat{U}^{\dagger}\psi\rangle, \tag{4.18}$$

где $\widehat{U} = \widehat{U}_1 \otimes \widehat{U}_1$. Далее измеряют чётность состояния в зависимости от фазы ϕ, величину, которая равна 1, когда ионы находятся в одинаковых состояниях, и -1 – в разных. Очевидно, что в общем случае чётность выражается через населённости базисных состояний как

$$parity = p_{00} + p_{11} - p_{01} - p_{10}. \tag{4.19}$$

Данная величина также легко измеряема по сигналу флюоресценции ионов. Учитывая, что базисные состояния под действием $\widehat{U}$ преобразуются как

$$\begin{aligned} |00\rangle &\to \frac{|00\rangle + e^{i\phi}|01\rangle + e^{i\phi}|10\rangle + e^{2i\phi}|11\rangle}{2}, \\ |01\rangle &\to \frac{-e^{-i}\ |00\rangle + |01\rangle - |10\rangle + e^{i\phi}|11\rangle}{2}, \\ |10\rangle &\to \frac{-e^{-i\phi}|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle + e^{i\phi}|11\rangle}{2}, \\ |11\rangle &\to \frac{e^{-2i}\ |00\rangle - e^{-i\phi}|01\rangle - e^{-i\phi}|10\rangle + |11\rangle}{2}, \end{aligned} \tag{4.20}$$

можно показать, что чётность запишется в виде:

$$\begin{aligned} parity &= \rho_{10,01} + \rho_{01,10} + e^{2i\phi}\rho_{00,11} + e^{-2i\phi}\rho_{11,00} \\ &= 2\mathrm{Re}\ \rho_{10,01} + 2\left|\rho_{00,11}\right|\cos(2\phi + \phi_0). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Отсюда видно, что зависимость чётности от фазы анализирующего импульса имеет вид косинуса, при этом половина амплитуды равна $\left|\rho_{00,11}\right|$. Таким образом,

все слагаемые выражения (4.16) могут быть измерены и, соответственно, достоверность проведённой операции.